II

APLICACION DE LA TEORIA DE DIFERENCIAS FINITAS AL CALCULO DE POLINOMIOS

1.—*Introducción.*

Sea una *Sucesión* (fr. "suite", ing. "sequence") de números reales o, en general, de elementos que formen parte de un cuerpo,

$$(1-1) \qquad \mu_1,\ \mu_2,\ \mu_3,\ \mu_4,\ \ldots,\ \mu_{p-1},\ \mu_p,\ \ldots$$

en la cual los μ_i siguen una ley, conocida o desconocida de formación. Acostúmbrase definir las *Sucesiones* de *Diferencias* de primero, segundo, ..., p—ésimo orden, como sigue,

$$\Delta_1\mu_1 = \mu_2 - \mu_1; \quad \Delta_1\mu_2 = \mu_3 - \mu_2;$$
$$\Delta_1\mu_3 = \mu_4 - \mu_3; \ \ldots \ \Delta_1\mu_p = \mu_{p+1} - \mu_p; \ \ldots$$

Los términos $\Delta_1\mu_1$, $\Delta_1\mu_2$, $\Delta_1\mu_3$, ..., $\Delta_1\mu_i$, ... constituyen la Sucesión de Diferencias de primer orden de la (1—1). Asimismo,

$$\Delta_2\mu_1 = \Delta_1\mu_2 - \Delta_1\mu_1; \quad \Delta_2\mu_2 = \Delta_1\mu_3 - \Delta_1\mu_2;$$
$$\Delta_2\mu_3 = \Delta_1\mu_4 - \Delta_1\mu_3; \quad \Delta_2\mu_4 = \Delta_1\mu_5 - \Delta_1\mu_4;$$
$$\ldots \ \Delta_2\mu_p = \Delta_1\mu_{p+1} - \Delta_1\mu_p; \ \ldots$$

nos da en sus elementos $\Delta_2\mu_1$, $\Delta_2\mu_2$, $\Delta_2\mu_3$, ..., $\Delta_2\mu_p$, ... la Sucesión de Diferencias de segundo orden de (1—1).

En general se define la Sucesión de Diferencias de orden *p*, relativas a la Sucesión (1—1), a saber,

$$(1-2) \quad \Delta_p\mu_1,\ \Delta_p\mu_2,\ \Delta_p\mu_3,\ \Delta_p\mu_4,\ \ldots,\ \Delta_p\mu_i,\ \ldots$$

como sigue,

$$\Delta_p\mu_1 = \Delta_{p-1}\mu_2 - \Delta_{p-1}\mu_1;$$
$$\Delta_p\mu_2 = \Delta_{p-1}\mu_3 - \Delta_{p-1}\mu_2;$$
$$\ldots \ \Delta_p\mu_i = \Delta_{p-1}\mu_{i+1} - \Delta_{p-1}\mu_i; \ \ldots$$

2.—*Expresión directa de las Diferencias por medio de los términos, μ_i.*

Procederemos inductivamente, así:

$$\Delta_1\mu_1 = \mu_2 - \mu_1; \quad \Delta_2\mu_1 = \Delta_1\mu_2 - \Delta_1\mu_1$$
$$= \mu_3 - \mu_2 - (\mu_2 - \mu_1) = \mu_3 - 2\mu_2 + \mu_1;$$
$$\Delta_3\mu_1 = \mu_4 - 2\mu_3 + \mu_2 - (\mu_3 - 2\mu_2 + \mu_1)$$
$$= \mu_4 - 3\mu_3 + 3\mu_2 - \mu_1;$$
$$\Delta_4\mu_1 = \Delta_3\mu_2 - \Delta_3\mu_1$$
$$= \mu_5 - 3\mu_4 + 3\mu_3 - \mu_2 - (\mu_4 - 3\mu_3 + 3\mu_2 - \mu_1)$$
$$= \mu_5 - 4\mu_4 + 6\mu_3 - 4\mu_2 + \mu_1; \ \ldots$$

En general, podemos expresar los resultados anteriores por medio de la fórmula simbólica:

$$(2-1) \qquad \Delta_p\mu_1 = (\mu - 1)^{(p)}\mu_1$$

que, para el término general viene a ser,

$$(2-2) \qquad \Delta_p\mu_i = (\mu - 1)^{(p)}\mu_i$$

Al efectuar el desarrollo simbólico deben reemplazarse μ^r, $\mu^r\mu_i$ por μ_r, μ_{r+i} respectivamente, lo cual equivale a cambiar los exponentes por índices, sometidos a la ley de adición causada por la multiplicación.

Para demostrar la validez de la fórmula (2—2), apelamos a la inducción completa. Aceptando su validez para un cierto p, demostraremos que también es válida para $p+1$. En efecto, aplicada la (2—2 a dos términos consecutivos de la sucesión original, o sea al escribir,

$$\Delta_p\mu_{i+1} = (\mu - 1)^{(p)}\mu_{i+1};$$
$$\Delta_p\mu_i = (\mu - 1)^{(p)}\mu_i$$

y substraer ordenadamente estas últimas, se tiene,

$$\Delta_p\mu_{i+1} - \Delta_p\mu_i = \Delta_{i+1}\mu_i$$
$$= (\mu - 1)^{(p)}\mu_{i+1} - (\mu - 1)^{(p)}\mu_i$$
$$= (\mu - 1)^{(p)}(\mu_{i+1} - \mu_i)$$
$$= (\mu - 1)^{(p)}(\mu - 1)\mu_i$$

y, finalmente, $\quad \Delta_{p+1}\mu_i = (\mu - 1)^{(p+1)}\mu_i$

Como la inspección directa nos ha hecho ver que la (2—2) es válida hasta $p = 4$, queda demostrada su generalidad.

3.—*Sucesión potencial de términos en progresión aritmética.*

Sea la sucesión de términos en progresión aritmética,

$$a,\ a+r,\ a+2r,\ a+3r,\ \ldots,$$
$$a+(i-1)r,\ a+ir,\ \ldots$$

los que designaremos para mayor brevedad, así

$$(3-1) \qquad q_0,\ q_1,\ q_2,\ q_3,\ \ldots,\ q_i,\ q_{i+1},\ \ldots$$

Consideremos las potencias índice s de la sucesión escrita, a saber,

$$(3-2) \qquad q_0^s,\ q_1^s,\ q_2^s,\ q_3^s,\ \ldots,\ q_i^s,\ q^s_{i+1},\ \ldots$$

Para sucesiones de esta naturaleza demostraremos el siguiente

Teorema.—La sucesión de Diferencias de orden $s+1$ *de la sucesión formada por las potencias índice* s *de términos que forman progresión aritmética, es nula. Simbólicamente:*

$$\Delta_{s+1}\, q_i^s = 0$$

Demostración.—Veamos cómo se cumple el teorema para $s = 1$ y luégo para $s = 2$.

$s = 1$

$$q_i : a, a + r, a + 2r, \ldots, a + (i-1)r, a + ir, \ldots$$
$$\Delta_1 q_i : \quad r, r, r, \ldots, r, \ldots$$
$$\Delta_2 q_i : \quad 0, 0, \ldots$$

$s = 2$

La sucesión cuadrática da las diferencias siguientes,

$$q_i^2 : \quad a^2, (a+r)^2, (a+2r)^2, \ldots, [a+(i-1)r]^2, (a+ir)^2, \ldots$$
$$\Delta_1 q_i^2 : \quad 2ar + r^2, 2ar + 3r^2, 2ar + 5r^2, \ldots, 2ar + (2i-1)r^2, \ldots$$
$$\Delta_2 q_i^2 : \quad , 2r^2, 2r^2, \ldots, 2r^2, \ldots$$
$$\Delta_3 q_i^2 : \quad 0, 0, \ldots, 0, \ldots$$

Pasamos ahora a demostrar que si el teorema es válido para un cierto s (s, entero positivo) también es válido para $s + 1$. Es decir, aceptamos que se cumple la relación,

$$\Delta_{s+1} q_i^s = 0$$

y hacemos ver que, como consecuencia de la anterior, también deberá cumplirse,

$$\Delta_{s+2} q_i^{s+1} = 0$$

En efecto, de acuerdo con la definición, podemos escribir,

$$\begin{aligned}\Delta_{s+2} q_i^{s+1} &= \Delta_{s+1} q_{i+1}^{s+1} - \Delta_{s+1} q_i^{s+1} \\ &= \Delta_{s+1} (q_i + r)^{s+1} - \Delta_{s+1} q_i^{s+1} \\ &= \Delta_{s+1} [q_i^{s+1} + \binom{s+1}{1} q_i^s r + \ldots \\ &\quad + r^{s+1} - q_i^{s+1}] \\ &= \Delta_{s+1} \left[\binom{s+1}{1}\right] q_i^s\, r + \left[\binom{s+1}{2} q_i^{s-1}\, r^2 \right. \\ &\quad \left. + \ldots + r^{s+1}\right] \\ &= \binom{s+1}{1} r\, \Delta_{s+1}\, q_i^s + \binom{s+1}{2} \\ &\quad r^2\, \Delta_{s+1}\, q_i^{s-1} + \ldots = 0\end{aligned}$$

Esto último puesto que el teorema había sido aceptado para s y por consiguiente, ***hasta*** s. En la cadena de igualdades se ha tenido en cuenta que las constantes pueden sacarse fuera del signo u *operador* Δk.

El teorema queda entonces demostrado puesto que su validez se había hecho presente para $s = 2$, después para $s = 3$.

Corolario.—Es interesante subrayar que para la sucesión de potencias de los números naturales, a saber,

$$1^s, 2^s, 3^s, 4^s, \ldots, p^s, \ldots$$

caso en el cual $r = 1$, el teorema general suministra la importante relación,

$$\Delta_{s+1}\, p^s = 0$$

la que en palabras se puede enunciar diciendo que la sucesión de orden $s + 1$ de la sucesión constituída por las potencias s de los números naturales, es cero (o mejor, es la ***sucesión nula***, 0, 0, 0, ...). Esta relación implica el que las sucesiones de orden más alto que $s + 1$ también son nulas, ya que son Diferencias de la sucesión nula. En símbolos, la relación

$$\Delta_{s+1}\, p^s = 0, \quad \text{implica} \quad \Delta_{s+1+k}\, p^s = 0$$

para todo k entero positivo.

4.—*Expresión de la sucesión de los términos* μ_i *de la sucesión original o primitiva, por medio de las Diferencias* Δ_i.

De acuerdo con la definición de Diferencias Finitas, tenemos,

$$\begin{aligned}\mu_2 - \mu_1 = \Delta_1\, \mu_1 \quad \text{de donde,} \quad \mu_2 &= \mu_1 + \Delta_1\, \mu_1 \\ &= (1 + \Delta_1)\, \mu_1 = (1 + \Delta)^{(1)}\, \mu_1\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mu_{k+1} - \mu_k = \Delta_1\, \mu_k \quad \text{de donde} \quad \mu_{k+1} &= \mu_k + \Delta_1\, \mu_k \\ &= (1 + \Delta_1)\, \mu_k = (1 + \Delta_1)^{(1)}\, \mu_k\end{aligned}$$

Podemos, por consiguiente, escribir,

$$\mu_k = (1 + \Delta)^{(1)}\, \mu_{k-1}, \ldots, \mu_3 = (1 + \Delta)^{(1)}\, \mu_2, \quad \mu_2 = (1 + \Delta)^{(1)}\, \mu_1$$

Multiplicando entre sí las relaciones anteriores y suprimiendo factores comunes, resulta,

$$\text{(4—1)} \qquad \mu_{k+1} = (1 + \Delta)^{(k)}\, \mu_1$$

que, para el término de rango k se modifica así,

$$\text{(4—2)} \qquad \mu_k = (1 + \Delta)^{(k-1)}\, \mu_1$$

Si consideramos que μ_i es el primer término de la Sucesión, la fórmula (4—2) conduce, finalmente, a

$$\text{(4—3)} \qquad \mu_{k+i-1} = (1 + \Delta)^{k-1}\, \mu_i$$

Es interesante observar que la (4—3) puede obtenerse de la (4—2) multiplicando los dos miembros de esta última por μ_i a derecha y sometiendo los índices a la misma ley que el álgebra ordinaria aplica a los exponentes.

5.—*Sumación de los términos de una Sucesión.*

Con el propósito de calcular la suma $\sum_{k=1}^{n} \mu_k$, procederemos como sigue,

$$\sum_{k=1}^{n} \mu_k = \sum_{k=1}^{n} (1 + \Delta)^{(k-1)}\, \mu_1 =$$

$$\left[\sum_{k=1}^{n} (1 + \Delta)^{(k-1)}\right] \mu_1 = \left[\frac{(1 + \Delta)^{(n)} - 1}{(1 + \Delta)^{(1)} - 1}\right] \mu_1$$

$$= \left[\frac{(1 + \Delta)^{(n)} - 1}{\Delta_1}\right] \mu_1$$

Puesto que se trata de la suma de términos de una progresión geométrica cuya razón es

$$(1 + \Delta)^{(1)} = (1 + \Delta_1)$$

El primer término de dicha progresión resulta ser,

$$(1 + \Delta)^{(0)} = 1$$

El anterior resultado puede escribirse,

$$(5-1) \qquad \sum_{k=1}^{n} \mu_k = \left[\frac{(1 + \Delta)^{(n)} - 1}{\Delta_1}\right] \mu_1$$

Efectuando las operaciones indicadas a la derecha del signo $=$, se tiene,

$$\sum_{k=1}^{n} \mu_k = \frac{\binom{n}{1}\Delta_1 \mu_1 + \binom{n}{2}\Delta_2 \mu_1 + \binom{n}{3}\Delta_3 \mu_1 + \ldots + \binom{n}{n}\Delta_n \mu_1}{\Delta_1}$$

de donde,

$$(5-2) \qquad \sum_{k=1}^{n} \mu_k = \binom{n}{1}\mu_1 + \binom{n}{2}\Delta_1 \mu_1 + \binom{n}{3}\Delta_2 \mu_1 + \binom{n}{4}\Delta_3 \mu_1 + \ldots$$

en la cual hemos dividido por Δ_1 según las reglas relativas a exponentes.

6.—*Cálculo numérico de polinomios.*

Pasamos a aplicar la teoría anterior, al caso de una función racional entera de la variable x (polinomio en x). Suponemos en lo que sigue que tanto los coeficientes como la variable x pertenecen al cuerpo de los números reales. Sea, pues, la función racional entera,

$$(6-1) \qquad f(x) = \alpha_0 x^s + \alpha_1 x^{s-1} + \alpha_2 x^{s-2} + \ldots + \alpha_{s-1} x + \alpha_s = \sum_{v=0}^{s} \alpha_v x^{s-v}$$

Supongamos que a la variable x se le asignan valores en progresión aritmética,

$$x,\ x + h,\ x + 2h,\ x + 3h,\ \ldots,\ x + (p - 1)h,\ \ldots$$

los valores correspondientes de la función $f(x)$, serán indicados respectivamente así:

$$f_0(x),\ f_1(x),\ f_2(x),\ \ldots,\ f_{p-1}(x),\ \ldots$$

o de manera aún más suscinta, por

$$f_0,\ f_1,\ f_2,\ \ldots,\ f_{p-1},\ \ldots$$

Vamos ahora a demostrar que, bajo las condiciones apuntadas, es válida la siguiente relación

$$(6-2) \qquad \Delta_{s+1} f_i(s) = 0$$

que puede ser considerada como la ecuación en diferencias finitas de la función entera racional (polinomio) de grado s.

Demostración.—Teniendo en cuenta que el operador Δ posee la propiedad distributiva, podemos escribir,

$$(6-3) \qquad \Delta_{s+1} f_1(x) = \Delta_{s+1} \alpha_0 x_1^s + \Delta_{s+1} \alpha_1 x_1^{s-1} + \ldots + \Delta_{s+1} \alpha_{s-1} x_1 + \Delta_{s+1} \alpha_s$$

Ahora bien, las constantes α_v pueden ser escritas fuera del operador Δ en calidad de coeficientes, así:

$$(6-4) \qquad \Delta_{s+1} f_1(x) = \alpha_0 \Delta_{s+1} x_1^s + \alpha_1 \Delta_{s+1} x_1^{s-1} + \ldots + \alpha_{s-1} \Delta_{s+1} x_1 + \alpha_s \Delta_{s+1} (1)$$

Como según el teorema fundamental demostrado en el aparte 3, valen las relaciones,

$$\Delta_{s+1} x_1^s = \Delta_{s+1} x_1^{s-1} = \ldots = 0$$

todos los términos del segundo miembro de la (6—4) resultan nulos. En consecuencia,

$$\Delta_{s+1} f_1(x) = 0 \quad \text{o también,} \quad \Delta_{p+1} f_1(x) = 0$$

Teniendo en cuenta que, según la (4—2), se tiene

$$\Delta_{p+1} \mu_1 = (\mu - 1)^{(p+1)} \mu_1$$

si cambiamos en ésta μ por f y μ_1 por f_1 llegamos, finalmente, a la fórmula,

$$(6-5) \qquad \Delta_{p+1} f_1 = (f - 1)^{(p+1)} f_1$$

que puede ser escrita en forma más explícita, como sigue,

$$(6-6) \qquad f_{p+1+i} = \binom{p+1}{1} f_{p+i} - \binom{p+1}{2} f_{p+i-1} + \ldots$$

la cual para $i = 0$, da,

$$(6-7) \qquad f_{p+1} = \binom{p+1}{1} f_p - \binom{p+1}{2} f_{p-1} + \binom{p+1}{3} f_{p-2} - \ldots + (-1)^p f_0$$

La (6—7) puede expresarse también como producto escalar o matricial, a saber, de la matriz línea

$$\left[\binom{p+1}{1} - \binom{p+1}{2} + \binom{p+1}{3} - \ldots + (-1)^p \binom{p+1}{p+1}\right]$$

por la mariz columna,

$$\begin{pmatrix} f_p \\ f_{p-1} \\ f_{p-2} \\ \vdots \\ f_0 \end{pmatrix}$$

Dicho producto se escribe en forma sintética como sigue,

$$(6-8) \qquad f_{p+1} = \left[(-1)^{v-1}\binom{p+1}{v}\right] \cdot \left[f_{p+1-v} \right]$$

en la cual v ha de recibir los valores 1, 2, 3, 4, ..., p, $p+1$.

El resultado anterior, contenido en la fórmula (6 — 8) simplifica y "automatiza" considerablemente el cálculo de polinomios. El autor del presente estudio ya lo había hallado siguiendo un procedimiento completamente diferente. Se encuentra en el folleto que tiene por título, *"Deducción de una fórmula para interpolación y sus aplicaciones al álgebra"*, publicada en Medellín, Colombia, 1951.

Veamos algunas aplicaciones numéricas de la fórmula (6 — 8). Para un polinomio de tercer grado, la fórmula explícita (6 — 7), da,

$$(6-9) \qquad f_4 = 4 f_3 - 6 f_2 + 4 f_1 - f_0$$

Los coeficientes del desarrollo binómico llevan signos alternados. Sea, por ejemplo,

$$f(x) = x^3 - 16 x^2 + 55 x - 24$$

Por cómputo directo se tiene,

$$f(0) = -24;\ f(1) = 16;\ f(2) = 30;\ f(3) = 24$$

valores que, llevados a la (6 — 9) dan,

$$f(4) = -f(0) + 4 f(1) - 6 f(2) + 4 f(3) = 4$$

En esta forma el cómputo se puede continuar indefinidamente.

En seguida presentaremos un ejemplo más amplio y mayores detalles concernientes al cómputo de polinomios. (Para abreviar, hablaremos siempre de polinomios en lugar de funciones algébricas racional enteras.)

Sea el polinomio de sexto grado y de coeficientes enteros,

$$f(x) = x^6 - 5 x^5 + 8 x^4 - 12 x^3 - 6 x^2 + 9 x - 7$$

Los siete valores de partida, obtenidos por cómputo directo, son,

$$f(-1) = 4;\ f(0) = -7;\ f(1) = -12;$$
$$f(2) = -77;\ \text{etc.}$$

Estos valores aparecen en la tercera columna del modelo de cálculos indicado como Cuadro I. En la primera columna hacemos constar los coeficientes binómicos $\binom{7}{v}$ provistos con signos alternados. La labor de cálculo consiste eh efectuar el producto matricial (escalar) de los coeficientes binómicos por siete valores consecutivos de $f(x)$.

CUADRO I

1	$f(-1)$	=	4	4	—7	—12	—77	—196
—7	$f(0)$	=	—7	49	84	539	1 372	—1 323
21	$f(1)$	=	—12	—252	—1617	—4 116	3 969	71 148
—35	$f(2)$	=	—77	2695	6860	—6 615	118 580	—538 405
35	$f(3)$	=	—196	—6860	6615	118 580	538 405	1 696 380
—21	$f(4)$	=	189	—3969	—71148	—323 043	—1 017 828	—2 616 789
7	$f(5)$	=	3388	23716	107681	339 276	872 263	1 956 668
				15383	48468	124 609	279 524	567 483
				$f(6)$	$f(7)$	$f(8)$	$f(9)$	$f(10)$

Explicación del Cuadro I.—La primera horizontal está formada por los valores de $f(x)$ previamente calculados; la segunda horizontal está constituída con los productos de —7 por los mismos valores de $f(x)$ con excepción del primero; la tercera horizontal se forma con los productos de 21 por los valores previamente conocidos de $f(x)$, con excepción de los dos primeros, etc., etc.

A continuación presentamos el cómputo del mismo polinomio, para valores decimales de la variable independiente.

CUADRO II

1	$f(2,0)$	—77,000000	—77,000000	—88,546129	—100,912896	—113,952461
—7	$f(2,1)$	—88,546129	619,822903	706,390272	797,667227	892,187968
21	$f(2,2)$	—100,912896	—2119,170816	—2393,001681	—2676,563904	—2963,953125
—35	$f(2,3)$	—113,952461	3988,336135	4460,939840	4939,921875	5412,547840
35	$f(2,4)$	—127,455424	—4460,939840	—4939,921875	—5412,547840	—5862,782135′
—21	$f(2,5)$	—141,140625	2963,953125	3247,528704	3517,669281′	3762,513216
7	$f(2,6)$	—154,644224	—1082,509568	—1172,556427′	—1254,171072	—1322,561303
			—167,508061	—179,167296	—188,937329	—196,000000
			$f(2,7)$	$f(2,8)$	$f(2,9)$	$f(3,0)$

La construcción del cuadro anterior se facilita considerablemente al proceder en la siguiente forma: una vez obtenido un valor para $f(x)$ multiplícase por los coeficientes binomiales en orden ascendente. Los productos se van colocando en los espacios a la derecha en la línea correspondiente al coeficiente binomial. Como éstos se repiten a excepción del último de ellos que es 1, el número de productos por efectuar, se reducirá a la mitad. Para aclarar esta explicación se ha provisto con un índice a los productos de $f(2,7)$ por 7, —21, etc.

Observación.—El cálculo de los valores de $f(x)$, según el procedimiento explicado, debe ser realizado con toda exactitud. Al abandonar cifras decimales se produce una divergencia apreciable entre los valores obtenidos y los verdaderos, como puede verse por el ejemplo siguiente:

CUADRO III

1	—77,0000	—77,0000	—88,5461	—100,9129	—113,9525
—7	—88,5461	619,8227	706,3903	797,6675	892,1878
21	—100,9129	—2119,1709	—2393,0025	—2676,5634	—2963,9526
—35	—113,9525	3988,3375	4460.9390	4939,9210	5412,5470
35	—127,4554	—4460,9390	—4939,9210	—5412,5470	—5862,7275
—21	—141,1406	2963,9526	3247,5282	3517,6365	3762,3096
7	—154,6442	—1082,5094	—1172,5455	—1254,1032	—1322,3105
		—167,5065	—179,1576	—188,9015	—195,8987

que es el mismo cómputo realizado antes, con los valores de la función a cuadro decimales exactos. Al comparar los resultados de este último cálculo con los obtenidos antes, se aprecia un "desajuste" sistemático.