

INTERPOLACION Y DIFERENCIAS FINITAS

LUIS DE GREIFF BRAVO

I

APUNTACIONES ADICIONALES SOBRE UNA FORMULA PARA INTERPOLACION

En un folleto publicado por el autor del presente estudio, en Medellín, Colombia, el año 1951, el cual lleva por título "Deducción de una fórmula para interpolación y sus aplicaciones al álgebra" se deduce y discute la siguiente fórmula, cuya numeración original anotamos:

$$(5,1) \quad f(x + \gamma h) = A_0 f(x) + A_1 f(x + h) + A_2 f(x + 2h) + \dots + A_{p-1} f(x + [p-1]h) + \frac{B_0}{p!} h^p f^{(p)}(x) + \frac{B_1}{(p+1)!} h^{p+1} f^{(p+1)}(x) + \dots$$

La mencionada fórmula para interpolación puede ser escrita de manera sintética como sigue:

$$(5,1 \text{ bis}) \quad f(x + \gamma h) = \sum_{v=0}^{p-1} A_v f(x + v h) + \sum_{\mu=0}^{\infty} \frac{B_{\mu}}{(p+\mu)!} h^{p+\mu} f^{(p+\mu)}(x) + \dots$$

en la cual los coeficientes A_v pueden expresarse así,

$$(i) \quad A_v = (-1)^{p-v-1} \frac{\pi_{k=0}^{p-1} (\gamma - k)}{(\gamma - v) (p - v - 1)! v!}$$

y los B_{μ} ,

$$B_{\mu} = \frac{1}{\delta} \begin{vmatrix} 1^1 & 2^1 & 3^1 & \dots & (p-1)^1 & \gamma^1 \\ 1^2 & 2^2 & 3^2 & \dots & (p-1)^2 & \gamma^2 \\ 1^3 & 2^3 & 3^3 & \dots & (p-1)^3 & \gamma^3 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1^{p-1} & 2^{p-1} & 3^{p-1} & \dots & (p-1)^{p-1} & \gamma^{p-1} \\ 1^{p+\mu} & 2^{p+\mu} & 3^{p+\mu} & \dots & (p-1)^{p+\mu} & \gamma^{p+\mu} \end{vmatrix}$$

(ii)

δ es el menor correspondiente a $\gamma^p + \mu$ en el determinante escrito. Explícitamente, es el siguiente determinante de Vandermonde o de Cauchy:

$$(iii) \quad \delta = \begin{vmatrix} 1^1 & 2^1 & 3^1 & \dots & (p-1)^1 \\ 1^2 & 2^2 & 3^2 & \dots & (p-1)^2 \\ 1^3 & 2^3 & 3^3 & \dots & (p-1)^3 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1^{p-1} & 2^{p-1} & 3^{p-1} & \dots & (p-1)^{p-1} \end{vmatrix}$$

Vamos a aplicar ahora la (5,1 bis) al cálculo de un polinomio de grado $p-1$. En dicho caso las derivadas de orden p y superiores son todas nulas, lo cual permite escribir,

$$(j) \quad f(x + \gamma h) = \sum_{v=0}^{p-1} A_v f(x + v h)$$

Nos interesa particularmente aplicar esta fórmula (j) a la extrapolación, en el caso de ser $\gamma = p$. Se tiene,

$$(jj) \quad f(x + p h) = \sum_{v=0}^{p-1} A_v^* f(x + v h)$$

Veamos los valores de A_v^* . Teniendo en cuenta que en (i) substituye $\gamma = p$, es entonces,

$$(I) \quad A_v^* = (-1)^{p-v-1} \frac{\pi_{k=0}^{p-1} (p - k)}{(p - v) (p - v - 1)! v!} = (-1)^{p-v-1} \frac{p!}{(p-v)! v!} = (-1)^{p-v-1} C_p^v$$

donde se representa con C_p^v el número combinatorio o coeficiente binómico correspondiente (designado también así: $\binom{p}{v}$).

La fórmula (jj) queda entonces así:

$$(II) \quad f(x + p h) = \sum_{v=0}^{p-1} (-1)^{p-v-1} C_p^v f(x + v h)$$

Para referirnos a polinomios de grado p , debemos escribir la fórmula (II) incrementando el parámetro $p-1$ en una unidad. Queda entonces,

$$(s) \quad f(x + [p+1] h) = \sum_{v=0}^p (-1)^{p-v} C_{p+1}^v f(x + v h)$$

El segundo miembro revela ser un producto escalar (matriz línea por matriz columna). Se puede escribir,

$$(ss) \quad \begin{vmatrix} f(x + [p+1] h) \\ (-1)^{p-1} C_{p+1}^1, (-1)^{p-2} C_{p+1}^2, \dots \\ (-1)^0 C_{p+1}^p \end{vmatrix} \times \begin{bmatrix} f(x + 0h) \\ f(x + 1h) \\ f(x + 2h) \\ \dots \\ f(x + ph) \end{bmatrix}$$

Si en (ss) pasamos el término que forma el primer miembro al segundo y se tiene en cuenta para uniformidad que $C_{p+1}^{p+1} = 1$, se tiene,

$$(r) \quad \left| \begin{array}{l} 0 = [(-1)^p C_{p+1}^0, (-1)^{p-1} C_{p+1}^1, \\ \quad (-1)^{p-2} C_{p+1}^2, \dots, \\ (-1)^0 C_{p+1}^p, (-1)^{-1} C_{p+1}^{p+1}] \times \left\{ \begin{array}{l} f_0 \\ f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_p \\ f_{p+1} \end{array} \right\} \end{array} \right|$$

donde se designa por f_i el valor $f(x + ih)$. La fórmula (r) presentada en forma operatorial, es

$$(rr) \quad (1 - f)^{(p+1)} = 0$$

en cuyo desarrollo los exponentes de f han de ser considerados como índices.

El ejemplo siguiente aclarará su aplicación. Sea $\bar{p} = 4$, es decir sea un polinomio de cuarto grado. La fórmula (ss) nos da,

$$\begin{aligned} f(x + 5h) &= [C_5^0, -C_5^1, C_5^2, -C_5^3, C_5^4] \times \left\{ \begin{array}{l} f(x + 0h) \\ f(x + 1h) \\ f(x + 2h) \\ f(x + 3h) \\ f(x + 4h) \end{array} \right\} \\ &= [1, -5, 10, -10, 5] \times \left\{ \begin{array}{l} f_0 \\ f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ f_4 \end{array} \right\}, \text{ etc.} \end{aligned}$$

Basándome en la teoría de *diferencias finitas* he obtenido las fórmulas anteriores. La *memoria* correspondiente aparece en este número de la Revista.

Veamos ahora el caso $x = N$, N entero y además $h = 1$. Se trata entonces de la sucesión de potencias de los números naturales. A saber,

$$f(x) = N^p, f(x + h) = (N + 1)^p, \dots,$$

$$f(x + [p + 1]h) = [N + p + 1]^p$$

y la fórmula (ss) suministra,

$$(N + p + 1)^p = \left[(-1)^p \binom{p+1}{0}, (-1)^{p-1} \binom{p+1}{1}, \dots, (-1)^0 \binom{p+1}{p} \right] \times \left\{ \begin{array}{l} (N + 0)^p \\ (N + 1)^p \\ (N + 2)^p \\ \vdots \\ (N + p)^p \end{array} \right\}$$

Ejercicio numérico. Si en la relación últimamente escrita, substituimos $N = 5$, $p = 3$, se tiene,

$$\begin{aligned} x^3 &= [-1, 4, -6, 4] \cdot \left\{ \begin{array}{l} 5^3 \\ 6^3 \\ 7^3 \\ 8^3 \end{array} \right\} = \\ &= (-125 + 864 - 2058 + 2048) \\ &= 2912 - 2183 = 729 = 9^3 \end{aligned}$$

todo lo cual nos permite concluir que *las potencias p de $p + 2$ números naturales consecutivos, están ligados entre sí linealmente a los coeficientes del desarrollo binómico de orden $p + 1$, alternados en signo.*