II

RELATIVIDAD GENERALIZADA

(MANERA FACIL DE ENCONTRAR SUS CARACTERISTICAS)

En concordancia con los métodos que se han dado a conocer en otros escritos para encontrar las fórmulas de Einstein en la *Relatividad Restringida*, se establecerán a continuación las fórmulas principales correspondientes a la Relatividad Universal o Generalizada. Pero a modo de introducción se traducirán algunos párrafos del capítulo V del libro titulado "Les Théories d'Einstein" escrito por el matemático Lucien Fabre e impreso en 1922 por Payot & C^ie^. de París, 106 Boulevard Saint-Germain. A saber:

"Hemos visto que Einstein llega a una ley general intrínseca que en lenguaje absoluto se expresa por el símbolo

$$G_{\mu\nu} = o,$$

símbolo que equivale a diez ecuaciones diferenciales entre las g. De estas ecuaciones geenrales de la gravitación nos valdremos para deducir la ley particular del campo de gravitación de una partícula. Es igualmente con la ayuda de estas ecuaciones como Einstein llega a escribir bajo forma tensorial las leyes del electromagnetismo, de la hidráulica, de la termodinámica, etc. Nosotros no lo seguiremos en sus cálculos que son muy largos, muy complicados y accesibles solamente por matemáticos avezados en el cálculo diferencial absoluto. Me limitaré a indicar cómo Einstein pasa de las relaciones puramente formales, abstractas y en cierto modo logísticas que él obtuvo, a la ecuación de la ley concreta."

....

"Veamos ahora sumariamente cómo se obtiene la ley relativa en el campo de una partícula.

"De la ecuación $\delta\int ds = o$, de donde

$$ds^2 = g_{\mu\nu}\, dx_\mu\ dx_\nu\ ,$$

se deducen por desarrollo las cuatro funciones diferenciales:

$$\frac{d^2x_\sigma}{ds^2} = \Sigma_{\mu\nu}\ \Gamma^{\sigma}_{\mu\nu}\frac{dx_\mu\, dx_\nu}{ds\, ds}\ ,\ (\sigma = 1,\ 2,\ 3,\ 4)$$

con

$$\Gamma^{\sigma}_{\mu\nu} = -\frac{1}{2}\ \Sigma g^{\sigma\alpha}\left(\frac{\delta g_{\mu\alpha}}{\delta x_\nu} + \frac{\delta g_{\nu\alpha}}{\delta x_\mu} - \frac{\delta g_{\mu\nu}}{\delta x_\alpha}\right)$$

"Estas son las ecuaciones del movimiento de una partícula material en el campo de gravitación de las $g_{\mu\nu}$.

"(Notar que el simbolismo empleado por Einstein $g^{\sigma\alpha}$ es la determinante menor de $g_{\sigma\alpha}$).

"El potencial de gravitación comprende entonces diez ecuaciones diferenciales definidas por

$$\Sigma_\alpha \frac{d\Gamma^{\alpha}_{\mu\nu}}{dx_\alpha} + \Sigma_{\alpha\beta}\ \Gamma^{\alpha}_{\mu\nu}\ \Gamma^{\beta}_{\nu\beta} = k\,(T_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} T),$$

$T_{\mu\nu}$ y T son expresiones ligadas a las componentes de un cierto tensor energía que tiene, en la determinación del campo, el valor de la densidad de masa en las ecuaciones newtonianas; siendo k la constante de gravitación.

"Podemos igualmente dar la ley simple ingeniosamente deducida de los trabajos de Einstein por Schwarzschild, en un caso particularmente sencillo.

"Este sabio busca la solución de las ecuaciones $G_{\mu\nu} = o$ para el campo de una partícula en reposo ubicada en el origen de coordenadas espaciales. Escoge coordenadas polares r, θ, φ, t, y escribe la expresión que ya nos es bien conocida

$$ds^2 = -dx^2 - dy^2 - dz^2 + dt^2.$$

De ésta deduce la siguiente:

$$ds^2 = -e^{\lambda}dr^2 - e^{\mu}(r^2\, d\theta^2 + r^2\ \text{sen}^2\,\theta d\varphi^2) + e^{\nu}dt^2,$$

y por cambio de variables,

$$ds^2 = -e^{\lambda}\, dr^2 - r^2\, d\theta^2 - r^2\, \text{sen}^2\,\theta d\varphi + e^{\nu}\ dt^2.$$

La cual da por identificación con los correspondientes coeficientes de Riemann

$$g_{11} = -e^{\lambda}\ ,\ g_{22} = -r^2,\ g_{33} = -r^2\ \text{sen}^2\,\theta,\ g_{44} = e^{\nu},$$

de donde resulta el determinante

$$g = -e^{\lambda+\nu}\, r^4\ \ \text{sen}^2\ \theta.$$

las $G_{\mu\nu} = o$ que son diez ecuaciones entre las g, se reducen a seis ecuaciones independientes porque hay cuatro relaciones idénticas. Reemplazando en esas ecuaciones las g por los valores que acaban de encontrarse, obtendremos para ds^2 una relación independiente de λ, μ, ν, que será la ley buscada.

"Si se pone $e^{\nu} = \gamma$ se obtiene sucesivamente y por cálculos extremamente laboriosos

$$e^{\lambda} = \gamma^{-1}$$

$$\lambda = 1 - \frac{2m}{r}$$

en donde $2m$ es una constante de integración, m más tarde será identificada con la masa de la partícula en unidades de gravitación.

«Ahora podremos escribir la ley en una forma notablemente sencilla

$$ds^2 = -\gamma^{-1}\, dr^2 - r^2\, d\theta^2 - r^2 \operatorname{sen}^2 \theta d\varphi^2 + \gamma dt^2.»$$

Además se nota que el primer término puede escribirse en esta forma:

$$-\frac{dr^2}{1 = \frac{2m}{r}}$$

....

"La sencillez del resultado a que llega Schwarzschild permite esperar que este resultado podrá obtenerse algún día por medios más sencillos que los que él necesitó emplear."

Hasta aquí lo escrito por Lucien Fabre.

Transcrito lo anterior vamos a exponer una manera de llegar al mismo resultado valiéndonos del principio establecido en otro estudio y que se reduce a la suma de las protoenergías y al establecido por Einstein sobre la inercia de la energía y que es el mismo de lo referente a seudomasa en el estudio aludido.

Para entrar en materia conviene tener un claro concepto de *el trabajo total de las acciones mutuas.* Puede estudiarse en el tomo primero del "Traité de Mécanique Rationnelle" par Paul Appell, en la página 121 de la edición de 1919 hecha en París por Gautier–Villars et Cie.

ECUACION QUE CARACTERIZA UN CAMPO ESTATICO DE GRAVITACION

El trabajo total de las acciones mutuas de dos masas m y M que producen campos de gravedad y mediando entre las masas la distancia r, tiene esta expresión: $\frac{2\,m\,M}{r}$.

Para la masa *uno* sería: $\frac{2\,m\,1}{r}$. Si la masa unidad es $\frac{c^2}{c^2}$, se tendrá para el campo producido por la masa m a la distancia r: $\frac{2\,m\,c^2}{r\,c^2}$; puesto que en todo punto del espacio–tiempo existe un protopotencial de valor c^2 siempre que haya ausencia de masas y porque ya hemos demostrado que toda protoenergía dividida por el cuadro de c, se comporta como una masa; relación que hemos designado con el nombre de *seudomasa.*

Esta cantidad $\frac{2\,m\,c^2}{r\,c^2}$ representa el trabajo total de las acciones mutuas que debe existir para la constitución del campo de gravedad y que se sustrae a la protoenergía del espacio–tiempo (protoenergía que puede designarse como ***protoenergía constitutiva***). Se tendrá, pues:

$$c^2{}_r = c^2 - \frac{2\,m\,c^2}{r\,c^2} = c^2\left(1 - \frac{2\,m}{r\,c^2}\right) = c^2\,(1 - k)$$

Sea $(1 - k) = \gamma$ con $k = \frac{2\,m}{r\,c^2}$; entonces $c^2{}_r = c^2\,\gamma$

Esta protoenergía es la que corresponde a cualquier punto de la esfera de radio r con centro en la masa m; esta esfera es pues una superficie de nivel.

Sea sobre esa esfera un punto de coordenadas φ y θ; en él la protoenergía remanente del espacio es $c^2{}_r$ y busquemos el valor de los cuadrados de velocidades a que puede dar lugar esa protoenergía sobre la superficie de nivel a la que se halla reducida. Los elementos de arco sobre las coordenadas esféricas φ y θ, los cuales son normales entre sí, permitirán velocidades que respectivamente llamaremos a y b; entonces la ecuación general de las protoenergías que es $v^2 = c^2 - u^2$, tomará sobre la superficie de nivel esta forma:

$$a^2 + b^2 = c^2{}_r - u^2$$

La *acción mutua* correspondiente será:

$$ka^2 + kb^2 = kc^2{}_r - ku^2 \qquad (1)$$

porque, por ejemplo, para a^2 la seudomasa es $\frac{a^2}{c^2}$ y por consiguiente la acción mutua será

$$\frac{2\,m\,a^2}{r\,c^2} = k\,a^2$$

Nótese que en esta expresión el símbolo m incluye el coeficiente de gravitación universal.

La fórmula (1) representa la energía invertida en la formación del campo cuando las velocidades a y b se presentan realmente para que puedan producirse las seudomasas respectivas; pero para que tales velocidades se presenten es menester el protopotencial, el cual en este caso está reducido a $c^2{}_r$; entonces se tendrá:

$$r^2{}_1 + a^2 + b^2 = c^2{}_r - u^2 \qquad (2)$$

en donde r_1 es la velocidad en la dirección del radio r.

La diferencia entre (2) y (1) es el protopotencial remanente en el espacio (el espacio–tiempo); protopotencial al cual quedará sometido el móvil que esté dentro del campo de atracción producido por la masa m. Esta diferencia es

$$(2) - (1) = (r^2{}_1 + a^2 + b^2 = c^2{}_r - u^2) -$$
$$(ka^2 + kb^2 = c^2{}_r k - u^2 k)$$

de donde resulta

$$r^2{}_1 + a^2\,(1\text{–}k) + b^2\,(1\text{–}k) = c^2{}_r\,(1\text{–}k) - u^2\,(1\text{–}k)$$

y puesto que $(1\text{–}k) = \gamma$ y $c^2{}_r = c^2\gamma$, esta ecuación toma la forma

$$\gamma u^2 = \gamma^2 c^2 - r^2{}_1 - a^2\gamma - b^2\gamma$$

y por consiguiente se tendrá:

$$u^2 = \gamma c^2 - \gamma^{-1}\, r^2{}_1 - a^2 - b^2$$

Ahora poniendo expresas las cantidades infinitesimales, que son $u = \frac{ds}{dt}$, $r_1 = \frac{dr}{dt}$, $a =$ velocidad según la coordenada de longitud $a = r$ Sen $\theta \frac{d\varphi}{dt}$, y $b =$ velocidad según la colatitud $= r \frac{d\theta}{dt}$; se encuentra

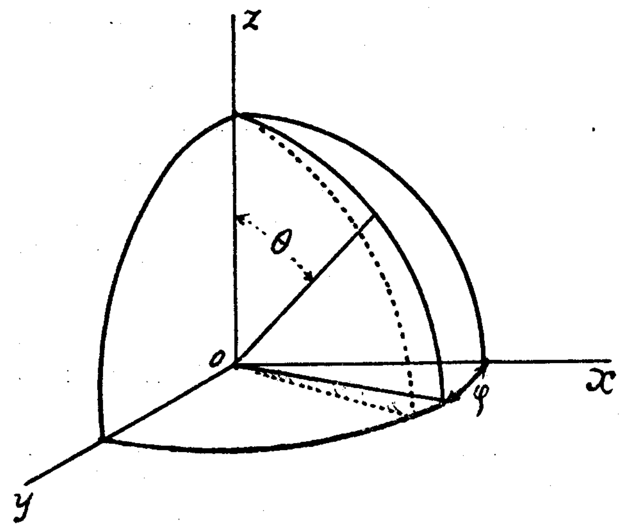
$$\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = \gamma c^2 - \gamma^{-1}\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 - r^2 \text{ Sen}^2\theta \left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 - r^2\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 \tag{3}$$

En estas fórmulas, como lo hace Schwarzschild, se acostumbra hacer igual a la unidad tanto el coeficiente de gravitación como la velocidad c, de lo cual resulta el empleo de una unidad llamada *unidad gravitatoria* y que H. Weyl denomina *radio de gravitación* puesto que tiene las dimensiones de una longitud o distancia. Se toma pues $m = G\frac{M}{c^2}$ cuya dimensión mecánica es L.

Para el sol $m = 1{,}47$ km.; para a tierra $m = 5$ mm.

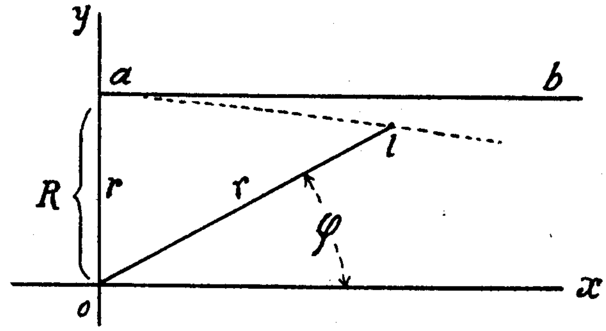
La fórmula (3) es la célebre fórmula de Schwarzschild, por medio de la cual se encuentran las trayectorias de los planetas y la de un rayo de luz, entre las más notables de sus aplicaciones. Empero, este autor escribe su fórmula de un modo más sencillo, puesto que toma c^2 igual a la unidad y quita los denominadores, con lo cual resulta:

$$ds^2 = -\gamma^{-1}\, dr^2 - r^2\, d\theta^2 - r^2\ Sen^2\, \theta d\varphi^2 + \gamma dt^2.$$



APLICACIONES DE LA FORMULA ANTERIOR

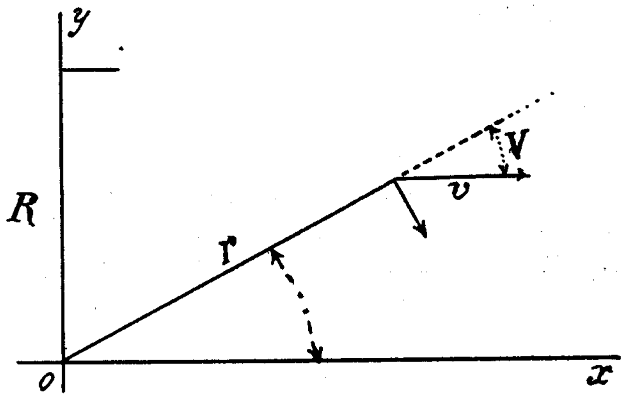
INFLEXION DE UN RAYO LUMINOSO. Un rayo de luz se desvía al pasar cerca de un cuerpo gravitante. Supondremos este cuerpo esferoidal como el sol; consideremos su centro en o y su radio R en la dirección del eje oy y su extremo muy cerca del punto a por donde pasa un rayo luminoso en la dirección $a\,b$ paralela al eje $o\,x$ o sea paralelamente a la tangente a la esfera de centro en o. Sobre la trayectoria efectiva del rayo tomaremos un punto l cuyo radio vector sea r formando con $o\,x$ el ángulo φ.



La ecuación de la trayectoria se halla de la siguiente manera: sea V el ángulo que la velocidad v del rayo hace con el vector r; entonces se tendrá:

$$v \text{ Cos } V = \frac{dr}{dt};\quad v \text{ Sen } V = r \frac{d\varphi}{dt} \tag{a}$$

En la ecuación general, escrita al final del párrafo anterior, se tendrá $ds^2 = u^2 =$ CERO porque en la ecuación primordial que es $c^2 = u^2 + v^2$, hay que tener en cuenta el caso de la luz y por tanto hacer $v^2 = c^2$, lo que da $u^2 = 0$ y por tanto $ds^2 = 0$.



En consecuencia queda así:

$$-\gamma^{-1}\, dr^2 - r^2\, d\theta^2 - r^2 \text{ Sen}^2\, \theta d\varphi^2 + \gamma\, dt^2 = 0$$

Para hacer más sencilla la fórmula se puede suponer el rayo de luz en el plano de las $x\,y$; en tal caso hay que hacer $\theta = \frac{\pi}{2}$ y entonces Sen $\theta = 1$ y $d\theta = 0$; en consecuencia se encuentra:

$$\gamma^{-1}\, dr^2 + r^2\, d\varphi^2 = \gamma\, dt^2 \tag{b}$$

Dividiendo por dt^2, se halla

$$\gamma^{-1}\, \frac{dr^2}{dt^2} + r^2 \frac{d\varphi^2}{dt^2} = \gamma$$

y por las ecuaciones (a):

$$\gamma^{-1}\, v^2 \text{ Cos}^2\, V + v^2 \text{ Sen}^2\, V = \gamma$$

Si v es normal a r, como corresponde al caso del rayo rasante a la esfera del radio R, entonces $V = \frac{\pi}{2}$ y, Cos $V = 0$; por tanto

$$v^2 = \gamma \qquad \therefore \qquad v = \sqrt{\gamma} \tag{c}$$

De la ecuación (b) se puede obtener una relación entre el ángulo φ y el radio vector r, y esa relación permitrá encontrar la ecuación de la trayectoria del rayo en coordenadas polares: dividiendo por $r^2 \, d\varphi$ se deduce esta igualdad:

$$\gamma^{-1} \frac{dt^2}{r^2 \, d\varphi^2} + 1 = \gamma \frac{dr^2}{r^2 \, d\varphi^2} \qquad \text{(d)}$$

Ahora se introduce este cambio de variable:

$u = \frac{1}{r}$ o sea $u = r^{-1}$, de lo cual resulta

$$du = - r^{-2} \, dr \quad \therefore \quad \frac{d^2 u}{dr^2} = 2 r^{-3} \quad \therefore$$

$$d^2 u = \frac{2 \, d \, r^2}{r^3} = 2 u \frac{dr^2}{r^2} \quad \therefore \quad \frac{dr^2}{r^2} = \frac{d^2 u}{2 u}$$

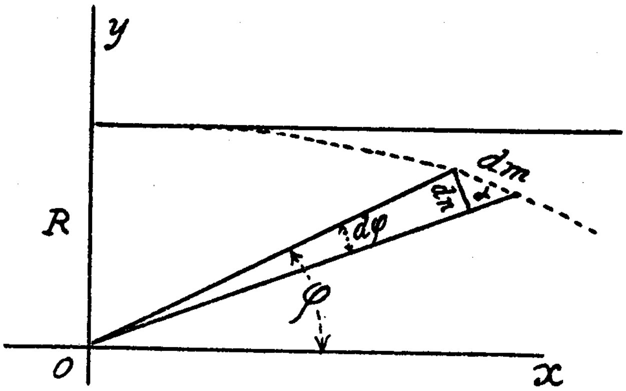
y sustituyendo en (d)

$$\gamma^{-1} \frac{d^2 u}{d\varphi^2} + 2 u = 2 u \gamma \frac{dt^2}{r^2 \, d\varphi^2} \quad \therefore$$

$$\frac{d^2 u}{d\varphi^2} + 2 \gamma u = 2 u \gamma \frac{\gamma \, dt^2}{r^2 \, d\varphi^2}$$

Como $\gamma = 1 - 2 mu$, $2 \gamma u = 2 u - 4 mu^2$ y por consiguiente se tendrá:

$$\frac{d^2 u}{d\varphi^2} + 2 u = 4 m u^2 + 2 u \gamma \frac{\gamma \, dt^2}{r^2 \, d\varphi}$$



Hay que investigar ahora el valor del quebrado $\frac{\gamma \, dt^2}{r^2 \, d\varphi}$. Por la ecuación (c) se tiene $\gamma \, dt^2 = v^2 \, dt^2 = dn_2$, siendo dn una longitud normal a r, puesto que se ha de tener $V = \frac{\pi}{2}$; $r \, d\varphi$ es el arco elemental engendrado por el radio vector $r + dr$, pues $dm = (r + dr) \, d\varphi$. Por tanto

$$\frac{\gamma \, dt^2}{r^2 \, d\varphi^2} = \frac{dn^2}{dm^2}$$

La relación $\frac{dn}{dm}$ es igual al Cos. del ángulo $\propto$. Este ángulo $\propto$ varía de 90° en a hasta 0° en el infinito; su promedio en grados está dado por

$$\frac{\Sigma \propto}{90} = \frac{90 \times \frac{1}{2} 90}{90} = 90/2 = 45^\circ$$

Cos. $45^\circ = 0.7071$, cuyo cuadrado es 0.5000. Por consiguiente $\frac{\gamma \, dt^2}{r^2 \, d\varphi^2} = 0.5 = \frac{1}{2}$ con lo cual se tiene que

$$2 u \gamma \frac{\gamma \, dt^2}{r^2 \, d\varphi^2} = u \gamma = u \, (1-2 \, mu) = u - 2 \, mu^2$$

y sustituyendo este valor, resulta:

$$\frac{d^2 u}{d\varphi^2} + 2 u = 4 \, mu^2 + u - 2 \, mu^2 \quad \therefore$$

$$\frac{d^2 u}{d\varphi^2} = 2 \, mu^2 - u$$

Según la Figura 2, $R/r \approx$ Sen φ; sea pues $Ru =$ Sen φ $\therefore$ $u =$ Sen φ / R y reemplazando esta igualdad, se encuentra:

$$\frac{d^2 u}{d\varphi^2} = \frac{2 m}{R^2} \text{Sen}^2 \varphi - \frac{\text{Sen} \, \varphi}{R} \quad .$$

Al valerse de esta ecuación se deducen las siguientes igualdades:

$$\frac{du}{d\varphi} = \frac{2 m}{R} (- \text{Sen} \, \varphi \;\; \text{Cos} \, \varphi) + \frac{\text{Sen} \, \varphi}{R} = -$$

$$\frac{m}{R} 2 \, \text{Sen} \, \varphi \;\; \text{Cos} \, \varphi + \frac{\text{Cos} \, \varphi}{R}$$

$$u = \frac{m}{R} [\text{Sen}^2 \varphi + 2 \, \text{Cos}^2 \varphi] + \frac{\text{Sen} \, \varphi}{R} = \frac{1}{r}$$

Multiplicando por Rr, esta última ecuación se transforma así:

$$R = r \, \text{Sen} \, \varphi + \frac{m}{R} \left[\frac{r^2 \, \text{Sen}^2 \varphi}{r} + \frac{2 \, r^2 \, \text{Cos}^2 \varphi}{r} \right]$$

Para pasar a coordenadas rectangulares basta sustituir los siguientes valores:

$$r \, \text{Sen} \, \varphi = y; \qquad r \, \text{Cos} \, \varphi = x; \qquad r = \sqrt{x^2 + v^2}$$

De este modo se obtiene esta ecuación:

$$y = R - \frac{m}{R} \frac{y^2 + 2 \, x^2}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

Para hallar la tangente angular de la asimptota conviene dividir numerador y denominador del quebrado por x y se obtiene esta forma

$$y = R - \frac{m}{R} \frac{\frac{y^2}{x} + 2 \, x}{\sqrt{1 + y/x^2}}$$

en la cual si $x \rightarrow \propto$, resulta $y = R - \frac{m}{R} 2 \, x$ de donde se deduce $\text{Tg} \, a = - \frac{2 \, m}{r}$.

Si R se toma igual al radio del sol ($R = 695.500$ km.), $m = 1.47$ km. como escribe Wely, y sabiendo que $1''$ equivale en radianios a $4.8481 \cdot 10^{-6}$, cuyo log. es $\overline{6}.6855749$, se ve que el ángulo es sumamente pequeño y que se puede tomar el ángulo en radianios por la tangente. Por consiguiente el ángulo $a = 2m/R$ y el ángulo total de las desviación del rayo luminoso será el doble, es decir $4 \, m/R$. Haciendo las operaciones numéricas correspondientes, se encuentra que es igual a $1''.74$

DESVIACION DE LAS LINEAS ESPECTRALES HACIA EL ROJO. Se demuestra este fenómeno, que ha recibido el nombre de "Efecto Einstein", y que se produce por el campo gravitatorio donde se engendra la luz, buscando —como lo hace

Fabre—, la relación entre los tiempos de vibración de un átomo en la fotoesfera y en la superficie de la tierra; para ello emplea los valores que deben corresponder a las raíces cuadradas de los coeficientes g_{44} de Einstein, y encuentra que esa relación vale $1+m/R$ siendo m la masa y R el radio del sol. De esto se deduce que las longitudes de onda de la luz producida en la superficie del sol, son más amplias que las de la luz producida en la superficie de la tierra, y por consiguiente las rayas espectrales de la luz solar deben aparecer desalojadas hacia el rojo con relación a las líneas espectrales de la luz originadas en la tierra.

Con la luz de sol no se pudo comprobar al principio ese desalojamiento por ser demasiado pequeño; pero con la luz producida en astros de campos de gravedad más intensos, como los producidos por las estrellas enanas blancas como la compañera de Sirio en donde la intensidad de la gravedad en su periferia es muchísimo mayor que la correspondiente en el sol, se pudo comprobar el "efecto Einstein". En este astro en cuya superficie se calculó que un litro de agua pesaría 50 toneladas, se comprobó por el astrónomo W. S. Adams el desalojamiento espectral habiendo descontado el efecto Doppler puesto que se conocían las características de la revolución del astro en torno de Sirio.

De la fórmula establecida al principio de este estudio sobre el campo gravitacional, se puede deducir el "efecto Einstein" procediendo como se expone a continuación: al establecer dicha fórmula se halló esta igualdad,

$$c^2_r = c^2\,(1 - 2\,m/r)$$

de la cual se deduce esta otra,

$$\frac{c^2}{c^2_r} = \frac{1}{1-2\,m/r} = 1 + 2\,m/r$$

cuya raíz cuadrada, con suficiente aproximación, es esta: $\dfrac{c}{c_r} = 1 + \dfrac{m}{r}$

y por consiguiente $c = c_r\,(l + m/r)$.

Para el sol se tendrá: $c = c_R\,(l + M/R)$

Para la tierra será $c = c_t\,(l + m/r)$

Eliminando c entre estas dos igualdades se encuentra

$$c_t\,(l + m/r) = c_R\,(l + M/R)$$

Poniendo las velocidades de la luz en función de una longitud de onda monocromática, resulta

$$\frac{\lambda}{t}\,(l + m/r) = \frac{\lambda}{T}\,(l + M/R)$$

De aquí se deduce $\dfrac{T}{t} = \dfrac{l + M/R}{l + m/r}$

M/R es igual a 0.000 002 116;

m/r = 0.000 000 000 785; se tendrá:

$$\frac{T}{t} = 1.000\ 002\ 115$$

Esta igualdad indica que el período T es mayor que el t, o sea que el período para la onda de una misma luz es mayor en el sol que en la tierra, por consiguiente las correspondientes líneas del espectro se desviarán hacia el rojo; se produce pues un efecto igual al de Doppler–Fizeau, que se ha denominado efecto Einstein.

El "efecto Einstein" no se pudo comprobar claramente con la luz del sol porque resulta muy pequeña la diferencia de longitudes de onda; pero se comprobó con éxito cuando se hicieron experiencias con la luz de astros de mayor potencial, como sucedió con la luz de la estrella compañera de Sirio, pequeña y blanca, en cuya superficie el campo es 1 200 veces mayor que en el sol; y en general se obtuvieron resultados igualmente favorables con otras estrellas enanas blancas.

Se ha demostrado que para un mismo medio de propagación, la velocidad de la luz es la misma tanto en un sentido como en el opuesto. Por consiguiente si hay un medio cuya transparencia se deba el enrarecimiento de la materia que contiene y en su interior hacia el centro hay un punto T, se puede admitir que entre este punto T y un punto P en la periferia de una esfera de radio r cuyo centro esté en las proximidades de T y que abarque el medio de materia enrarecida, hay una diferencia de potencial del campo de gravitación formado por el conjunto de materia contenida en el medio. Esto no implica en modo alguno que el punto T sea el centro de la esfera. Entonces si m es la masa contenida en la esfera, se puede aplicar una ecuación de la forma

$$c_r = c\left[1 + \frac{m}{r}\right]$$

aplicable a la luz procedente de un punto sobre la periferia de la esfera supuesta, y esto denotaría la presencia del efecto Einstein indiscriminable del efecto Doppler–Fizeau.

Por consiguiente la desviación, hacia el rojo de la luz procedente de las galaxias no es imputable en toda su magnitud a un alejamiento sistemático de las galaxias con respecto a la tierra. Son partidarios de esta idea Zwicky y Ten Brunggenkate.

Las presiones de los gases también producen efectos análogos al Doppler–Fizeau.

A pesar de la anterior demostración no hay que perder de vista la teoría de la *expansión del universo* que presenta como principal prueba el alejamiento prodigioso de las galaxias deducido del corrimiento hacia el rojo de las líneas espectrales tomado como el fenómeno Doppler–Fizeau; expansión de quê son partidarios muchos profesores de gran renombre entre los científicos, pues tal teoría, aunque no ha sido preconizada por Einstein, tiene su fundamento en llamada "constante cosmológica" introducida por este sabio en sus fórmulas relativas al campo gravitacional, estimulado para ello por consideraciones sobre la necesidad de una densidad finita de la materia contenida en el universo con el fin de que resultara más clara la deducción de un universo finito con la cual está más acorde la teoría de la relatividad generalizada, aunque en rigor no era indispensable la introducción de un término más con la mencionada "constante".

Las primeras fórmulas de Einstein no la contenían. El mismo Einstein dice que ese término adicional no es de absoluta necesidad, pues el matemático Friedman demostró, el primero, que es posible, en concordancia con las ecuaciones del campo de gravitación, tener una densidad finita en el espacio tridimensional, sin agregar nada *ad hoc* en las ecuaciones del campo.

Sitter en 1917, basado en apreciaciones relativistas, llegó a la hipótesis de que los cuerpos lejanos como las nebulosas, debían estar dotados de velocidades de alejamiento; aunque por esa época sólo se conocían las velocidades radiales de tres nebulosas espirales: dos de alejamiento y una de aproximación. Después Sliper y Humason, en los Estados Unidos, estudiaron lo espectros de más de 200 nebulosas espirales y encontraron que con excepción de un 6% los espectros acusaban desalojamiento hacia el rojo. Años más tarde el astrónomo Edwin Hubble, de Monte Wilson, quien se había dedicado a estudiar las galaxias llegó a la convicción de que las nebulosas espirales se alejaban de la tierra a grandes velocidades con tanto mayor rapidez cuanto más distantes, como lo expresan las fórmulas que dio a conocer en los estudios publicados en unión de su colaborador Milton L. Humason.

Pero lo más sensacional es que Einstein en su libro "The Meaning of Relativity", publicado en 1950, dice hacia la página 128, que no se puede considerar el descubrimiento de Hubble sino como una expansión del sistema estelar, pues ninguno de los conocimientos de la física actual permite interpretar de otra manera el fenómeno observado.

La teoría primitiva de Einstein conceptúa el universo como finito y en reposo; pero Sitter fundándose en la misma teoría dedujo que los más lejanos cuerpos celestes tienden a separarse; entonces como consecuencia natural se pensó que las cosmologías de Einstein y de Sitter eran opuestas entre sí, pero según lo que escribió en su tinoso libro *Armonía Física del Mundo* el erudito científico Rafael Torres Mariño, surgió la opinión del matemático belga, abate Georges Edouard Lemetre, por la cual se eliminó la aparente oposición, pues hizo ver que la idea de Einstein correspondía a un equilibrio inestable y que una vez alcanzado pudo presentarse el ensanche de que habla Sitter. Con estas ideas esbosó una teoría sobre el proceso que parece estar siguiendo en la actualidad el universo.

Muchas son las fantasías forjadas sobre estos distintos conceptos en relación con lo que parece que está pasando en el universo; pero no hay que perder de vista que en estas apreciaciones sugeridas por la observación, lo que estamos viendo hoy en las galaxias lejanísimas, hace millones de años que pasó y que si las geodésicas del espacio–tiempo tienen curvatura esferóidica, lo que se observa por la luz procedente de las galaxias está en la dirección de la tangente a la trayectoria luminosa que nos llega y en consecuencia, si el fenómeno considerado es el de Doppler, no hay por qué asegurar que las galaxias se alejan radialmente; a lo sumo se podría decir que hace millones de millones de años estaban describiendo cuurvas extrañamente inmensas, semejantes a las trayectorias de los cometas o quizá cerradas y definidas como las de los satélites.

Bogotá, septiembre de 1955.