NUEVO CONCEPTO DE LA RELATIVIDAD EINSTENIANA

DARIO ROZO M.

I

RELATIVIDAD RESTRINGIDA

(LAS FORMULAS DE EINSTEIN DEDUCIDAS SIN RELATIVISMO Y LA ONDA DE BROGLIE)

Memoria presentada a la Academia Colombiana de Ciencias en marzo de 1953.

Las fórmulas de Einstein pueden obtenerse prescindiendo del relativismo, es decir, prescindiendo del concepto de *la relatividad de la simultaneidad* que constituye el fundamento de la teoría einsteniana. Tampoco es necesario el cálculo tensorial.

La relatividad de la simultaneidad implica la inconstancia de la extensión y del tiempo causada por la velocidad de que estén dotados los objetos. La posibilidad de esa inconstancia presupone un juicio que es difícil de admitir como lógico, porque riñe abiertamente con el concepto que se tiene de la naturaleza de las cosas; en esto estriba principalmente la dificultad que muchos experimentan para entender las teorías de Einstein.

Se evita esta dificultad y se hallan las mismas fórmulas de Einstein valiéndose únicamente de la variabilidad de la masa producida por la velocidad de que esté dotada.

El problema puede tratarse de esta manera: si la masa m, dotada de velocidad v, se incrementa en la cantidad μ, se debe tener

$$m\,v = (m + \mu)\,v_1$$

pero este incremento μ puede ponerse bajo esta forma:

$$m + \mu = m/\beta,$$

de donde resulta $m\,v = m\,v_1/\beta$, o sea $v = v_1/\beta$.

Haciendo $v = \dfrac{dl}{dt}$, $v_1 = \dfrac{dl_1}{dt_1}$, se obtiene

$$\frac{v}{v_1} = \frac{dl}{dt}\,\frac{dt_1}{dl_1} = \frac{1}{\beta}.$$

Esta fórmula para lapsos iguales, o sea para $dt = dt_1$, dará $dl = \dfrac{dl_1}{\beta}$ cuya integral es $l = \dfrac{l_1 + k}{\beta}$ con $k = -r_1\,t_1$.

Ahora bien, como en mecánica clásica se admite que no hay aumento de masa, se debe tener $\dfrac{dl}{dt} = \dfrac{dl_1}{dt_1}$ y sustituyendo el valor hallado para dl, se encuentra

$$\frac{dl_1}{\beta\,dt} = \frac{dl_1}{dt_1} \quad \therefore \quad \beta\,dt = dt_1 \quad \therefore \quad dt = \frac{dt_1}{\beta},$$

cuya integral es

$$t = \frac{t_1 + n}{\beta}, \quad \text{con} \quad n = -\frac{v_1\,l_1}{c^2}. \qquad (*)$$

Así, pues, para llegar a las fórmulas de Einstein, todo estriba en demostrar que una masa dotada de velocidad v adquiere un incremento de masa μ tal que se tenga $\mu = m\left(\dfrac{1}{\beta} - 1\right)$ y que la cantidad designada con β tenga el siguiente valor:

$$\beta = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}.$$

La demostración es la siguiente:

El estudio matemático del mundo físico debe basarse en el concepto de *velocidad,* porque la concomitancia entre espacio y tiempo es necesaria en la naturaleza y por consiguiente debe ser ineludible en los procesos matemáticos; se quiere decir con esto que cuando en los problemas de física intervenga el movimiento, no deben tomarse separadamente los espacios y los tiempos. Esto, que ya está admitido en la física moderna, preocupaba a los filósofos griegos cuatro centurias antes de Jesucristo, como lo demuestran los célebres problemas de Zenón de Elea, quien con ellos no pretendió, como se afirma, negar el movimiento, sino hacer ver que en los problemas en que éste interviene no pueden considerarse como independientes el espacio y el tiempo. La tortuga nunca alcanzará a Aquiles si se van considerando separadamente los espacios y los tiempos; pero el problema se resuelve si se hacen intervenir las respectivas velocidades de Aquiles y de la tortuga.

Así, pues, en los problemas en donde intervengan espacio y tiempo, se ha de emplear siempre la velocidad como elemento de cálculo, cuya expresión en función de tales elementos considerados infinitesimalmente es $v = \dfrac{ds}{dt}$.

Para demostrar lo del *incremento de la masa* debe conocerse una propiedad muy importante de la segunda potencia de la velocidad y que caracteriza

(*) La integración detallada de estas funciones puede verse en el estudio del autor titulado "Nuevas ideas sobre la Relatividad y la formación de la Materia" publicado en el No. 648 de **Anales de Ingeniería**, Bogotá, mayo 31 de 1954. Páginas 15 y 16.

al potencial; en efecto: el potencial p del campo newtoniano, en el cual figura el factor k que es el *coeficiente de gravitación,* tiene esta forma

$$p = k \frac{m}{r}$$

y como las dimensiones mecánicas de k son $M^{-1} L^3 T^{-2}$, resulta que la dimensión del potencial es $[p] = L^2 T^{-2}$, lo que da una *velocidad al cuadrado:* v^2.

Esto nos permite admitir que en ausencia de masas el *espacio* puede considerarse como un campo de potencial uniforme de la forma v^2; esto corresponde a lo que modernamente se denomina *espacio-tiempo.*

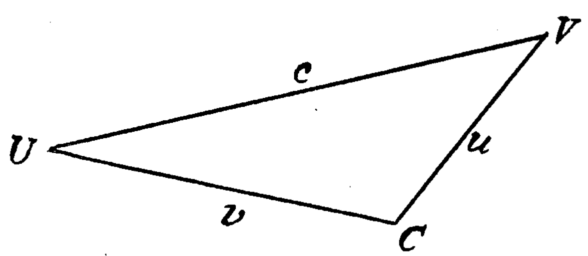
Esta clase de velocidades al cuadrado sin el factor masa se designará con los nombres de *protopotencial* o *protoenergía,* según los casos.

Bajo estos conceptos el espacio es algo activo capaz de producir velocidades y por consiguiente movimiento.

Sea c^2 ese protopotencial que caracteriza al espacio-tiempo, siendo c la máxima velocidad posible en la naturaleza; pero la experiencia muestra que hay muchas categorías de velocidades: sea v una de ellas.

También enseña la práctica que las velocidades se componen vectorialmente, y si v procede de c habrá necesariamente otra velocidad u para que v pueda ser menor que c. En consecuencia c, v, u formarán un triángulo como el de la figura adjunta de la cual se obtiene

$$v^2 = c^2 + u^2 - 2\, c\, u \;\; \text{Cos} \;\; V$$



Esta ecuación representa un caso particular del fenómeno que se estudia, ecuación que se constituyó mediante una función arbitraria u que debe guardar alguna relación con el ángulo V; eliminando esta función arbitraria por medio de la derivada, se obtendrá la ecuación general que corresponde al fenómeno. Procediendo así, se tiene

$$\frac{df}{du} = 0 = 2\, u - 2\, c \;\; \text{Cos} \;\; V$$

por tanto $u = c$ Cos V o sea Cos $V = \frac{u}{c}$ y sustituyendo resulta

$$v^2 = c^2 - u^2$$

$$c^2 = v^2 + u^2$$

igualdad que está expresada en *velocidades al cuadrado.*

Esta fórmula enseña que para que sea posible una velocidad v es necesaria una protoenergía u^2. En consecuencia para que un cuerpo se mueva es necesaria la presencia de la protoenergía u^2 diferente de v^2. Cuando u^2 es cero, v^2 se confunde con c^2, o sea que v^2 no es cinética: la traslación se anula.

La mecánica enseña que un trabajo o energía W producido por una masa m tiene esta forma

$$W = \frac{1}{2} \cdot m\, v^2$$

Guiados por esta igualdad parece que introduciendo el factor común $\frac{1}{2} m,$ se pudiera escribir

$$\frac{1}{2} m\, v^2 = \frac{1}{2} m\, c^2 - \frac{1}{2} m\, u^2$$

se tendría entonces en el primer miembro una expresión análoga a la de $W,$ pero no equivalente, porque W procede de una integración en donde uno de los límites corresponde a $v =$ CERO. Además en el segundo miembro de la igualdad formada hay indecisión en el comportamiento de las protoenergías, pues cuando $v^2 = 0, u^2$ puede ser cero o puede tomar el valor c^2, según las circunstancias. Hay pues que analizar esta igualdad, lo cual se consigue deduciendo de ella otra igualdad que traduzca alguna condición exigida por la mecánica, como la *cantidad de movimiento.*

Para hallar $m\, v$ acudamos al caso en que v sea constante, que es precisamente el que contempla la *Relatividad Restringida.* Habrá que derivar la expresión propuesta pero teniendo muy presente la dependencia mutua entre el espacio y el tiempo, lo cual queda establecido procediendo en esta forma:

$$mv \frac{\partial v}{\partial l} \frac{dl}{dt} = mc \frac{\partial c}{\partial s} \frac{ds}{dt} - mu \frac{\partial u}{\partial \sigma} \frac{d\sigma}{dt}$$

ecuación ésta que es lo mismo que

$$mv^2 \frac{\partial v}{\partial t} = mc^2 \frac{\partial c}{\partial s} - mu^2 \frac{\partial u}{\partial \sigma}$$

por consiguiente se debe tener $\quad \frac{\partial u}{\partial l} = \frac{\partial c}{\partial s} = \frac{\partial u}{\partial \sigma}$

En consecuencia, de la derivada con relación a los espacios, se puede obtener

$$mv \frac{\partial v}{\partial l} = mc \frac{\partial c}{\partial s} - mu \frac{\partial u}{\partial \sigma}$$

o sea: $\qquad mv = mc - mu$

Cuando v es constante no hay incremento de velocidad y entonces $mv = 0$ y resultaría $mc - mu = 0$, igualdad que no se cumple puesto que si v existe, u debe ser menor que $c,$ de donde se deduce que el valor de m es diferente en cada término y habrá que escribir

$$m_o c - mu = 0 \qquad \therefore \qquad m = m_o \frac{c}{u}$$

El valor del coeficiente c/u se deduce de la ecuación establecida

$$v^2 = c^2 - u^2 \qquad \therefore \qquad u^2 = c^2 - v^2$$

$$\therefore \qquad \frac{u}{c} = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} = \beta \qquad \therefore \qquad m = \frac{m_o}{\beta}$$

Como $\beta < 1$, $m > m_o$; hagamos $m = m_o + \mu$ y en consecuencia

$$\mu = m_o \left(\frac{1}{\beta} - 1\right).$$

Q. E. D.

Queda pues demostrado que

$$l = \frac{l_1 - v_1 t_1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \qquad t = \frac{t_1 - \frac{v_1 l_1}{c^2}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \qquad m = \frac{m_o}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

fórmulas éstas que son las fórmulas cardinales de Einstein.

LA ONDA DE DE-BROGLIE. Como corolario de la anterior demostración resulta que siendo u función de un coseno, debe tener carácter ondulatorio, de lo cual se infiere que para que se produzca una traslación, de velocidad v, se necesita una onda acompañante de protoenergía u^2.

Así pues un cuerpo de masa m que se mueve con velocidad v, irá acompañado de una onda que tendrá velocidad de grupo v y velocidad de face tal que posea una protoenergía igual a u^2.

Salta a la vista que esta onda es la misma que fue introducida hipotéticamente por De-Broglie y para la cual dio Schrödinger la expresión matemática bajo esta forma

$$\nabla^2 s = - \frac{8 \pi^2 m (E-V)}{n^2 h^2} s$$

En la cual

m = masa del corpúsculo.

h = constante de Planck: $[h] = M L^2 T^{-1}$, (acción)

s = función de onda

n = número entero

$$(E-V) = E_{Cin}; \qquad E = E_{Tot}; \qquad V = E_{Pot}$$

En efecto, para nuestro caso de la onda u se tiene

$$\nabla^2 s = \frac{1}{u^2} \frac{\partial^2 s}{\partial t^2}.$$

La solución general de esta ecuación es

$$s = X(x)\ T(t)$$

con las funciones X y T de la forma siguiente

$$X = \frac{\text{Cos}}{\text{Sen}}\ px \qquad T = \frac{\text{Cos}}{\text{Sen}}\ upt$$

con p arbitrario.

Según estas fórmulas, un tipo sencillo de integral será

$$s = 2A \ \text{Cos}\ kx\ \text{Cos}\ kut$$

Si en el lapso t hay n período de Planck, se debe tener $k = \frac{2\pi}{n\lambda}$ con $\lambda =$ *longitud de onda.*

Del valor de s se obtiene $\frac{\partial^2 s}{\partial t^2} = -2 A k^2 u^2$ Cos kx Cos kut y sustituyendo valores:

$$\frac{\partial^2 s}{\partial t^2} = - \frac{4\pi^2 u^2}{n^2} s \quad \therefore \qquad \nabla^2 s = - \frac{4\pi^2}{n^2 \lambda} s$$

En física se ha demostrado que $\lambda = h/mv$ de donde se deduce $\frac{1}{\lambda^2} = \frac{m^2 v^2}{h^2}$, que puede ponerse bajo esta forma $\frac{1}{\lambda^2} = \frac{m}{h^2} m v^2$

pero $\frac{1}{2} m v^2 = E_{Cin} = E-V \qquad \therefore$

$$m v^2 = 2(E-V), \qquad \text{y reemplazando:}$$

$$\frac{1}{\lambda^2} = \frac{m}{h^2} 2(E-V)$$

y por consiguiente

$$\nabla^2 s = - \frac{8\pi^2 m}{n^2 h^2} (E-V) s$$

que es la fórmula de Schrödinger.

De esto se debe deducir que para que cualquier cuerpo de masa m adquiera movimiento se necesita la onda de Broglie. Esta onda no es pues solamente un artificio matemático, corresponde a una realidad y no es únicamente acompañante de los corpúsculos componentes del átomo.

Del triángulo de velocidades se obtuvo el valor de v^2 y sirviéndose de él se hizo el estudio precedente. De manera análoga se procede sobre el valor u^2, y se obtendrá que entonces v^2 es de carácter ondulatorio, lo que puede interpretarse diciendo que u y v son permutables en cuanto al carácter ondulatorio y al de traslación. Del valor de c^2 se obtiene $u^2 = v^2$, ambos de carácter ondulatorio y con ciertas condiciones, lo cual permite dar fundamento a una teoría sobre la formación del átomo, lo que será motivo de otra comunicación a la Academia.

También se dará más tarde un estudio que facilita la manera de hallar las características de la RELATIVIDAD GENERALIZADA.