

LA MODERNA "ALGEBRA DE LAS MAGNITUDES" COMO INSTRUMENTO DE BUSQUEDA EN LA FASE INDUCTIVA DE LA FISICA

APLICACION AL ESTUDIO DE LA "RADIACION NEGRA"

POR CARLO FEDERICI
de la U. N.

SUMARIO

En el presente estudio queremos llegar a la fórmula de Planck $Df = 8 \pi Pl Fr^3 / Rm^3 (e^{Pl Fr / Bl Tm} - 1)$ en donde Df es la densidad energética específico-frecuencial monocromática, Fr es la frecuencia, Tm la temperatura absoluta, Rm la constante óptica de Roemer ($3,00 \cdot 10^8$ mt sc), Bl la constante térmica de Boltzmann ($1,38 \cdot 10^{-23}$ mt² sc⁻² Kg Kl⁻¹), Pl la constante dinámica de Planck ($6,62 \cdot 10^{-34}$ mt² sc⁻¹ Kg), usando como "instrumento de búsqueda" la moderna álgebra de las magnitudes, axiomatizada por el autor, y como "datos" los que tenía a disposición Planck en el año de 1900, es decir, la ley integral de Stefan, $Df = St \cdot Tm^4$, et, $St =$ constante termóptica de Stefan $= 7,57 \cdot 10^{-16}$ mt⁻¹ sc⁻² Kg Kl⁻⁴ y las "isotermas" de Lummer-Pringsheim, imágenes geométricas de la ecuación $Df = fn (Fr, Tm)$ siendo fn aún incógnita.

En el Cp 0 se busca dar una definición analítica y dimensional de las magnitudes que intervienen en el presente estudio, así como deducir, bajo las hipótesis más sencillas, las leyes que rigen cualquier tipo de radiación que satisfaga a los principios más generales de la física (1º y 2º principio de la termodinámica). Los fines que me empujaron a encabezar un estudio sobre "radiación negra" con un capítulo sobre definiciones elementales y principios fundamentales, son los siguientes:

- 0 tener listo el material "dimensional" para cuando se necesite durante la búsqueda que se desarrolla en los Cp sucesivos sin deber interrumpir la búsqueda misma para calcular las dimensiones de tal o tal otra magnitud.
- 1 llegar a poseer, de la manera más obvia, los coeficientes 2 y 4 π que se demuestran fundamentales para la realización de la búsqueda misma.
- 2 presentar un paradigma, por cuanto me sea posible, completo, del tratamiento de una teoría con el álgebra de las magnitudes.

En el Cp 1 se demuestra cómo debían fracasar, necesariamente, los esfuerzos que los físicos del último cuarto del siglo XIX hicieron para demostrar, por una parte con el uso de la "termóptica (Rm, Bl)" o sea de la termóptica caracterizada por las constantes dimensionales Rm y Bl (óptica maxwelliana y térmica boltzmanniana) la ley de Stefan $Dp = St \cdot Tm^4$, y para buscar, de otra parte, la ley, analíticamente aún para determinar $Df = fn (Fr, Tm)$, pero geoméricamente expresada por las "isotermas" de Lummer-Pringsheim.

En el Cp 2 se demuestra cómo los físicos hubieran debido considerar, necesariamente, como termóptica, apta para explicar las experiencias, aquella caracterizada por las constantes dimensionales Rm, Bl, St (termóptica (Rm, Bl, St)) porque, en efecto, la misma lleva a la demostración de la ley de Stefan (en la forma $Dp = Ad St Tm^4$ en donde Ad es una constante adimensional indeterminada) y no a una ley de tipo más general, y a la afirmación que la ley $Df = fn (Fr, Tm)$ tiene que ser del tipo $Df = Ad_1 Bl^{4/3} Fr^3 / Rm^4 St^{1/3} pl (Ad Bl^{1/3} Fr / Rm St^{1/3} Tm)$ en donde Ad_1 y Ad son dos constantes adimensionales indeterminadas y pl una función indeterminada también.

En el Cp 3 se busca, y se logra, simplificar los resultados obtenidos, y eliminar también las indeterminaciones numéricas Ad_1 y Ad , encontradas durante la búsqueda desarrollada en el Cp 1, llegando a demostrar que la consideración de una termóptica caracterizada por las constantes dimensionales Rm, Bl, Pl^{**} (Pl^{**} , 2ª constante dinámica de Planck y tal que $Pl^{**} = 3,55 \cdot 10^{-34}$ mt² sc⁻¹ Kg) nos lleva a la fórmula de Stefan en la forma $Dp = 8 \pi Bl^4 Tm^4 / Rm^3 Pl^{**3}$, y a la ley de distribución de la densidad energética específico-frecuencial monocromática en la forma (de Wien más especificada)

$$Df = 8 \pi Ri Pl^{**} Fr^3 / Rm^3 pl (Ri Pl^{**} Fr / Bl Tm)$$

en donde todavía, pl queda para determinar y en donde $Ri = (S_0^\infty x^3 dx / pl x)^{1/3}$.

En el Cp 4, finalmente, se logra demostrar que la nueva termóptica que interpreta óptimamente las experiencias es aquella determinada por las constantes dimensionales Rm, Bl, Pl (Pl , constante dinámica de Planck y tal que $Pl = 6,62 \cdot 10^{-34}$ mt² sc⁻¹ Kg) y por la ley de distribución

$$Df = 8 \pi Pl Fr^3 / Rm^3 (e^{Pl Fr / Bl Tm} - 1)$$

que es la llamada fórmula de Lummer-Planck.

En el Cp 5 se demuestra que la hipótesis cuantística "el número $d Fc$ " de "frecuencias características" o "grados de libertad" de un sistema de ondas estacionarias electromagnéticas contenidas en una cavidad Cv a la temperatura absoluta Tm y de volumen Vl y relativas al campo espectral $Fr \vdash Fr + d Fr$ es igual a $8 \pi Vl Fr^2 d Fr / Rm^3$ y la totalidad Fc de las mismas se distribuye en grupos de números Fc_x iguales a

$$F_c (1 - e^{-Pl Fr / Bl Tm}) e^{-x Pl Fr / Bl Tm}$$

caracterizados por el hecho de que cada grado perteneciente al grupo Fc_x posee una energía Ef_x igual

a x . Pl Fr siendo $x = 0, 1, 2, \dots$ = “nacida como proposición suficiente” para explicar las experiencias es también “proposición necesaria” porque deriva “necesariamente” (en el sentido lógico) de la interpretación de la fórmula de Lummer-Planck.

Por fin, en el Cp 6 se consignan en tablas los resultados obtenidos durante la búsqueda, y las expresiones, en términos de la nueva termóptica (Rm , Bl , Pl) de las ecuaciones encontradas durante el desarrollo de la misma (búsqueda), la relativa bibliografía y los diagramas.

Cp 0 Conceptos, definiciones, leyes fundamentales sobre “radiación”.

Pr 00 Emisión monocromática y radiador puntiforme.

0 Sea Rp un radiador de energía radiante monocromática en el intervalo espectral longitudinal $Ln \vdash Ln + dLn$, Pc un punto cualquiera distante Rd de Rp , Un un punto sobre la recta Rp Pc y distante 1 de Rp $d^2 As$ un ángulo sólido de eje Rp Pq y de amplitud sólida $d^2 As$, $d^2 Ar$ y $d^2 Ar_0$ dos secciones planas de $d^2 As$ por Pc , la primera cualquiera y la segunda normal al eje Rp Pc de $d^2 As$, Nr y Nr_0 respectivamente las normales en Pc a $d^2 Ar$ y $d^2 Ar_0$, así que Nr_0 coincide con la recta Rp Pc , y, por fin Ap el ángulo plano entre Nr y Nr_0 y de amplitud plana Ap .

1 Si $d^4 El^*$ es la energía radiante monocromática en el intervalo $Ln \vdash Ln + dLn$, emitida por Rp , y que pasa a través de $d^2 Ar$ durante la duración dDr , entonces se pone por definición que $d^2 Fl$ (que es igual al flujo

10 monocromático específico-longitudinal” en el intervalo espectral $Ln \vdash Ln + dLn$, según la dirección Nr , a través de la superficie $d^2 Ar$) = $d^4 El^*/dDr \cdot dLn$ de donde se deduce que $d^4 El^* = d^2 Fl \cdot dDr \cdot dLn$ y dimensionalmente tenemos que fl = energía/duración longitud = $ln^2 dr^{-2} mi/dr \ln = ln dr^{-3} mi$ y entonces que $fl = ln dr^{-3} mi$.

11 Il (que es igual a la “irradiación monocromática específico-longitudinal”, en el intervalo espectral $Ln \vdash Ln + dLn$, según la dirección Nr_0 , sobre la superficie $d^2 Ar$) = $d^2 Fl/d^2 Ar$ de donde se deduce que $d^2 Fl = Il d^2 Ar$ de donde se deduce que $d^4 El^* = Il d^2 Ar dDr dLn$ y dimensionalmente tenemos que il = flujo específico/área = $ln dr^{-3} mi/ln^2 = ln^{-1} dr^{-3} mi$ y entonces que $il = ln^{-1} dr^{-3} mi$.

12 El (que es igual a la emitividad monocromática específico longitudinal en el intervalo espectral $Ln \vdash Ln + dLn$, según la dirección Nr_0) = $d^2 Fl/d^2 As$ de donde se deduce que $d^2 Fl = El \cdot d^2 As$ de donde se deduce que $d^4 El^* = El \cdot d^2 As \cdot dDr \cdot dLn$, y además que $El d^2 As = Il d^2 Ar$ o también que $Il = El d^2 As/d^2 Ar$ y dimensionalmente tenemos que el = flujo específico/amplitud sólida = $ln dr^{-3}$

$mi/ap^{-2} = ln ap^{-2} dr^{-3} mi$ y entonces que $el = ln ap^{-2} dr^{-3} mi$.

13 Es conveniente notar que El depende de la naturaleza de Rp , de las condiciones que hacen de Rp un radiador, de la dirección de Nr y, por fin, de la longitud de onda Ln .

2 Recordando que $cs Ap \cdot d^2 Ar = d^2 Ar_0 = Rd^2 d^2 As/rd^2$ se deduce que $Il = d^2 Fl/d^2 Ar = d^2 Il/(Rd^2 d^2 As/rd^2 cs Ap) = (d^2 Fl/d^2 As) (cs Ap \cdot rd^2/Rd^2) = El rd^2 cs Ap/Rd^2$ o sea que $Il = El rd^2 cs Ap/Rd^2$ que es la primera ley del coseno o de Lambert (Juan Enrico; Mulhausen 1728, Berlin 1777) -Leslie (Juan; Largo 1766, Edimburgo 1832) para el caso de una emisión monocromática y generalización de la ley del “cuadrado” de Kepler (Juan; Weil 1571, Ratisbona 1630).

Pr 01 Emisión pancromática y radiador puntiforme.

0 Si $d^3 Ep^*$ es la energía pancromática emitida por Rp , en el intervalo espectral $0 - \infty$, y que pasa a través de $d^2 Ar$, durante la duración dDr , entonces se pone, por definición

00 $d^2 Fp$ (que es igual al flujo pancromático, en el intervalo espectral $0 - \infty$, según la dirección Nr_0 , a través de la superficie $d^2 Ar$) = $d^3 Ep^*/dDr$ de donde se deduce que $d^3 Ep^* = d^2 Fp \cdot dDr$ y dimensionalmente tenemos que fp = energía/duración = $ln^2 dr^{-2} mi/dr = ln^2 dr^{-3} mi$ y entonces que $fp = ln^2 dr^{-3} mi$.

01 Ip (que es igual a la irradiación pancromática, en el intervalo espectral $0 - \infty$, según la dirección Nr_0 , sobre la superficie $d^2 Ar$) = $d^2 Fp/d^2 Ar$ de donde se deduce que $d^2 Fp = Ip \cdot d^2 Ar$ y entonces que $d^3 Ep^* = Ip \cdot d^2 Ar dDr$ y dimensionalmente tenemos que ip = flujo pancromático/área = $ln^2 dr^{-3} mi/ln^2 = dr^{-3} mi$ y entonces que $ip = dr^{-3} mi$.

02 Ep (que es igual a la emitividad pancromática en el intervalo espectral $0 - \infty$, según la dirección Nr_0) = $d^2 Fp/d^2 As$ de donde se deduce que $d^2 Fp = Ep \cdot d^2 As$ y entonces que $d^3 Ep^* = Ep \cdot d^2 As \cdot dDr$ y además que $Ip d^2 Ar = Ep d^2 As$ o también que $Ip = Ep d^2 As/d^2 Ar$ y dimensionalmente tenemos que ep = flujo pancromático/amplitud sólida = $ln^2 dr^{-3} mi/ap^2 = ln^2 ap^{-2} dr^{-3} mi$ y entonces que $ep = ln^2 ap^{-2} dr^{-3} mi$.

1 Análogamente al 00.2 podemos deducir que $Ip = Epr d^2 cs Ap/Rd^2$ que es la primera ley del coseno o de Lambert-Leslie en el caso de una emisión pancromática, y generalización de la ley del “cuadrado” de Kepler.

2 Como la energía radiante de un haz prancromático es la suma de las energías monocromáticas que competen a cada intervalo espectral $Ln \vdash Ln + dLn$ cuando Ln varía en el intervalo $0 - \infty$ así podemos deducir que $d^3 Ep^* = S_0^\infty d^4 El^*$ variando Ln .

- 20 Por la relación $d^3 Ep^* = S_0^\infty d^4 El^*$ variando Ln se deduce que $d^2 Fp = d^3 Ep^*/d Dr = (S_0^\infty d^4 El^*)/d Dr = S_0^\infty (d^4 El^*/d Dr) = S_0^\infty (d^2 Fl d Dr d Ln/d Dr) = S_0^\infty d^2 Fl d Ln$ o sea que $d^2 Fp = S_0^\infty d^2 Fl d Ln$ y por este motivo el flujo pancromático, $d^2 Fp$, se llama también flujo integral o total.

21 Es conveniente notar que la proporcionalidad de $d^2 Fl d Ln$ a $d Ln$ está suficientemente satisfecha hasta a $d Ln$ tal que $d Ln = 10^{-8}$ mt para un espectro continuo $d Ln = 10^{-13}$ mt para un espectro de rayas.

22 Por la relación $d^2 Fp = S_0^\infty d^2 Fl d Ln$ se deduce que $Fp = d^2 Fp/d^2 Ar = (S_0^\infty d^2 Fl d Ln)/d^2 Ar = S_0^\infty (d^2 Fl/d^2 Ar) d Ln = S_0^\infty Il d Ln$ o sea que $Ip = S_0^\infty Il d Ln$ y por este motivo la irradiación pancromática, Ip , se llama también irradiación integral o total.

23 Por la relación $d^2 Fp = S_0^\infty d^2 Fl d Ln$ se deduce que $Ep = d^2 Fp/d^2 As = (S_0^\infty d^2 Il d Ln)/d^2 As = S_0^\infty (d^2 Fl/d^2 As) d Ln = S_0^\infty El d Ln$ o sea que $Ep = S_0^\infty El d Ln$ y por este motivo la emitividad pancromática Ep se llama también emitividad integral o total.

Pr 02 Emisión monocromática y radiador extenso.

0 Sea Re un radiador extenso de energía radiante, Pr un punto del mismo, $d^2 Ar^*$ un elemento superficial de Re que contenga a Pr , Nr^* la normal en Pr a $d^2 Ar^*$, Pc un punto cualquiera distante Rd de Pr , Un un punto sobre la recta $Pr Pc$ y distante 1 de Pr , $d^2 As$ un ángulo sólido de eje $Pr Pc$ y de amplitud sólida $d^2 As$, $d^2 Ar$ una sección plana de $d^2 As$ por Pc, Nr la normal a $d^2 Ar$ en Pc, Ap el ángulo plano entre Nr_0 y Nr , Ap^* el ángulo plano entre Nr^* y Nr_0 , siendo Nr_0 otro nombre de la recta $Pr Pc$.

1 Si $d^6 El^*$ es la energía radiante monocromática en el intervalo espectral $Ln \vdash Ln + d Ln$, emitida por $d^2 Ar^*$, y que pasa a través de $d^2 Ar$, durante la duración $d^4 Dr$, entonces se pone por definición

10 $d^4 Fl$ (que es igual al flujo monocromático específico longitudinal en el intervalo espectral $Ln \vdash Ln + d Ln$, emitido por $d^2 Ar^*$, según la dirección Nr_0 , a través de la superficie $d^2 Ar$) $= d^6 El^*/d Dr. d Ln$ de donde se deduce que $d^6 El^* = d^4 Fl. d Dr. d Ln$ y dimensionalmente tenemos que $fl = \text{energía/duración} \cdot \text{longitud} = \text{ln}^2 \text{ dr}^{-2} \text{ mi/dr ln} = \text{ln dr}^{-3} \text{ mi}$ y entonces que $fl = \text{ln dr}^{-3} \text{ mi}$.

11 Bl (que es igual a la brillantez monocromática específico longitudinal en el intervalo espectral $Ln \vdash Ln + d Ln$, de Re en Pr según la dirección Nr_0) $= d^4 Fl/cs Ap^* d^2 Ar^* d^2 As$ de donde se deduce que $d^4 Fl = Bl cs Ap^*$

$d^2 As$ y entonces que $d^6 El^* = Bl cs Ap^* d^2 Ar^* d^2 As$ dimensionalmente tenemos que $bl = \text{flujo específico/área} \cdot \text{amplitud sólida} = \text{ln dr}^{-3} \text{ mi/ln}^2 \text{ ap}^2 = \text{ln}^{-1} \text{ ap}^{-2} \text{ dr}^{-3} \text{ mi}$ y entonces que $bl = \text{ln}^{-1} \text{ ap}^{-2} \text{ dr}^{-3} \text{ mi}$.

12 El (que es igual a la emitencia monocromática específico longitudinal en el intervalo espectral $Ln \vdash Ln + d Ln$, de Re en Pr) $= (S_{si}^2 d^4 Fl)/d^2 Ar^*$ (en donde la integral doble S_{si}^2 se refiere al espacio irradiado Si) de donde se deduce que $S_{si}^2 d^4 Fl = El. d^2 Ar^*$ y dimensionalmente tenemos que $el = \text{flujo específico/área} = \text{ln dr}^{-3} \text{ mi/ln}^2 = \text{ln}^{-1} \text{ dr}^{-3} \text{ mi}$ y entonces que $el = \text{ln}^{-1} \text{ dr}^{-3} \text{ mi}$.

2 Por la relación $d^2 Ar = Rd^2 d^2 As/rd^2 cs Ap$ se deduce que $d^4 Fl = Bl cs Ap^* d^2 Ar^* d^2 As = Bl cs Ap^* d^2 Ar^* (d^2 Ar rd^2 cs Ap/Rd^2) = Bl rd^2 cs Ap^* cs Ap d^2 Ar^* d^2 Ar/Rd^2$ o sea que $d^4 Fl = Bl rd^2 cs Ap^* cs Ap d^2 Ar^* d^2 Ar/Rd^2$ y como en primera aproximación, para sólidos y líquidos incandescentes, Bl es independiente de Ap^* se deduce que " $d^4 Fl$ es proporcional directamente a $cs Ap^*$ " que es la segunda ley del coseno o de Lambert-Leslie en el caso de irradiación monocromática.

3 Si vale la segunda ley de Lambert-Leslie (independencia de Bl de Ap^*) se deduce que $El = (S_{si}^2 d^4 Fl)/d^2 Ar^* = S_{si}^2 (Bl cs Ap^* d^2 Ar^* d^2 As/d^2 Ar^*) = S_{si}^2 Bl cs Ap^* d^2 As = S_0^{\pi/2} Bl cs Ap^* 2\pi sn Ap^* (d Ap^*/rd) rd^e = (\pi rd^2/2) S_0^{\pi/2} Bl sn 2 Ap^* d 2 Ap^*/rd = (\pi rd^2 Bl/2) S_0^{\pi} d cs An = (\pi rd^2 Bl/2) \Big|_{\pi}^0 cs An = (\pi rd^2 Bl/2) (1 + 1) = \pi Bl rd^2$ o sea que $El = \pi Bl rd^2$, y no $El = \pi Bl$ como de costumbre.

Pr 03 Emisión pancromática y radiador extenso.

0 Si $d^5 Ep^*$ es la energía radiante pancromática, en el intervalo espectral $0 - \infty$, emitida por $d^2 Ar^*$, que pasa a través de $d^2 Ar$, durante la duración $d Dr$, entonces se pone por definición

00 $d^4 Fp$ (que es igual al flujo pancromático en el intervalo espectral $0 - \infty$ emitido por $d^2 Ar^*$, según la dirección Nr_0 , a través de $d^2 Ar$) $= d^5 Ep^*/d Dr$ de donde se deduce que $d^5 Ep^* = d^4 Fp. d Dr$ y dimensionalmente tenemos que $fp = \text{energía/duración} = \text{ln}^2 \text{ dr}^{-2} \text{ mi/dr} = \text{ln}^2 \text{ dr}^{-3} \text{ mi}$ o sea que $fp = \text{ln}^2 \text{ dr}^{-3} \text{ mi}$

01 Bp (que es igual a la brillantez pancromática en el intervalo espectral $0 - \infty$, de Re en Pr , según la dirección Nr_0) $= d^4 Fp/cs Ap^* d^2 Ar^* d^2 As$ de donde se deduce que $d^4 Fp = Bp cs Ap^* d^2 Ar^* d^2 As$ y entonces que $d^5 Ep^* = Bp cs Ap^* d^2 Ar^* d^2 As d Dr$ y dimensionalmente tenemos que $bp = \text{flujo/área} \cdot \text{amplitud sólido} = \text{ln}^2 \text{ dr}^{-3} \text{ mi/ln}^2 \text{ ap}^2 = \text{ap}^{-2} \text{ dr}^{-3} \text{ mi}$ y entonces que $bp = \text{ap}^{-2} \text{ dr}^{-3} \text{ mi}$

02 Ep (que es igual a la emitencia pancromática en el intervalo espectral $0 - \infty$, de Re en Pr)
 $= (S_{si}^2 d^4 Fp) / d^2 Ar^*$ de donde se deduce que
 $S_{si}^2 d^4 Fp = Ep \cdot d^2 Ar^*$ y dimensionalmente
tenemos que $ep = \text{flujo/área} = \ln^2 dr^{-3} \text{ mi}/\ln^2$
 $= dr^{-3} \text{ mi}$.

1 Análogamente al 02.2 podemos deducir que
 $d^4 Fp = Bp r d^2 cs Ap^* cs Ap d^2 Ar^* d^2 Ar / Rd^2$
y como en primera aproximación para sólidos
y líquidos incandescentes Bp es independiente
de Ap^* , se deduce que " $d^4 Fp$ es proporcional
a $cs Ap^*$ ", que es la segunda ley de Lambert-
Leslie en el caso de radiación pancromática.

2 Análogamente al 02.3 si vale la segunda ley de
Lambert-Leslie (independencia de Bp de Ap^*)
se deduce que $Ep = \pi Bp r d^2$ y no $Ep = \pi Bp$.

3 Como la energía radiante de un haz pancro-
mático es la suma de las energías monocro-
máticas que competen a cada intervalo espec-
tral $Ln \vdash Ln + d Ln$ al variar de Ln en el
intervalo $0 - \infty$, así se deduce que $d^5 Ep^* =$
 $S_0^\infty d^6 El^*$ variando Ln .

30 Por la relación, $d^5 Ep^* = S_0^\infty d^6 El^*$ varian-
do Ln , se deduce que $d^4 Fp = d^5 Ep^* / d Dr =$
 $(S_0^\infty d^6 El^*) / d Dr =$
 $S_0^\infty (d^4 Fl d Dr d Ln / d Dr) =$
 $S_0^\infty d^4 Fl d Ln$, o sea que,
 $d^4 Fp = S_0^\infty d^4 Fl \cdot d Ln$ y por este motivo el
flujo pancromático Fp se llama también flujo
integral total.

31 Por la relación $d^4 Fp = S_0^\infty d^4 Fl d Ln$ se
deduce que $Bp = d^4 Fp / d^2 Ar^* d^2 As cs Ap^*$
 $= (S_0^\infty d^4 Fl \cdot d Ln) / d^2 Ar^* d^2 As cs Ap^*$
 $= S_0^\infty (d^4 Fl / cs Ap^* d^2 Ar^* d^2 As) \cdot d Ln$
 $= S_0^\infty Bl \cdot d Ln$ o sea que $Bp = S_0^\infty Bl \cdot d Ln$
y por este motivo la brillantez pancromática
se llama también brillantez integral o total.

32 Por la relación $d^4 Fp = S_0^\infty d^4 Fl \cdot d Ln$ se
deduce que $Ep = (S_{si}^2 d^4 Fp) / d^2 Ar^*$
 $= (S_{si}^2 \int_0^\infty S d^4 Fl d Ln) / d^2 Ar^*$
 $= S_0^\infty [(S_{si}^2 d^4 Fl) / d^2 Ar^* \cdot d Ln]$
 $= S_0^\infty El \cdot d Ln$ o sea que $Ep = S_0^\infty El \cdot d Ln$
y por este motivo la emitencia pancromática
se llama también emitencia integral o total.

Pr 04 Emisión y absorción térmica.

0 Todo cuerpo en cuanto no tenga temperatura
absoluta igual a cero emite energía radiante
y es, luego, un "radiador", y siempre y cuando
no se encuentre solo en el espacio, recibe
energía radiante de otros cuerpos y es, pues,
un "ceptor".

Fijado un radiador, el estado de su super-
ficie, la naturaleza del medio que lo circunda,
entonces la radiación que el mismo emite
depende de su temperatura, aunque pueda
depender también de otros factores como en
el caso de la fluorescencia, de la fosfores-

cencia. Es difícil enumerar "todos" los facto-
res que deben excluirse para que la emisión
de energía radiante de un radiador sea "pu-
ramente térmica" que sea, a saber, función de
la sola temperatura del radiador que la emite.

1 Termodinámicamente se define como emisión
puramente térmica aquella de un radiador
cuyo estado interno puede mantenerse inva-
riado (no obstante la pérdida de energía ra-
diente emitida) suministrándole energía tér-
mica (por medio de un conveniente calorí-
metro-termostato).

En este sentido se dice que la emisión pu-
ramente térmica es mantenida a expensas de
la energía cedida al radiador isoterma, y el
radiador mismo se dice "puramente térmico".

2 Si un radiador Re es puramente térmico el
flujo de energía radiante que de cada ele-
mento $d^2 Ar^*$ de su superficie se propaga
en el semiespacio irradiado Si debe pensar-
se que es producido por el radiador a expen-
sas de una igual cantidad de energía térmica,
y fijada la naturaleza de Re , el estado de su
superficie, el medio en que sucede la emisión,
el intervalo espectral $Ln \vdash Ln + d Ln$ de
la radiación, entonces la energía radiante
emitida tiene que depender de la tempera-
tura absoluta Tm del mismo Re .

3 Se indica con $d^6 El^*$ la energía radiante
emitida por $d^2 Ar^*$ en la dirección Nr_0 , en
el ángulo sólido $d^2 As$, en el intervalo es-
pectral $Ln \vdash Ln + d Ln$, durante la duración
 $d Dr$, entonces $d^6 El^*$ se puede expresar, aná-
logamente a como vimos en 02.11 según la
fórmula

$$d^6 El^* = Bl cs Ap^* d^2 Ar^* d^2 As d Ln d Dr$$

de manera que si vale la segunda ley de
Lambert-Leslie Bl viene a medir la bri-
llanza monocromática de Re en Pr según
la dirección Nr_0 , en el intervalo espectral
 $Ln \vdash Ln + d Ln$ y la emitencia monocro-
mática en el intervalo espectral $Ln \vdash Ln + d Ln$
de Re en Pr , si se indica con El , es ligada
a Bl , como ya vimos en 0. según la fórmula
 $El = \pi Bl r d^2$. La brillantez Bl y la emiten-
cia El , monocromáticas, competen al ele-
mento $d^2 Ar^*$ de superficie de Re , pero como
la energía radiante emitida se supone "crea-
da" en Re a expensas de una igual cantidad
de energía térmica cedida a Re , se sigue que
 Bl y El se llamen también brillantez y emi-
tencia monocromáticas de Re , y por una
emisión puramente térmica, fijada la natura-
leza de Re , el estado de superficie, Bl y El
tiene que ser funciones solamente de Ln y
de Tm .

4 Sobre el elemento $d^2 Ar$ de superficie de
un aceptor Ac , incida un haz de rayos de
un ángulo sólido $d^2 As$ cuyo eje Nr_0 forme

con la normal Nr a $d^2 Ar$ el ángulo plano Ap , y cuyo intervalo espectral sea $Ln \vdash Ln + d Ln$. De la energía radiante incidente $d Ei$, durante la duración $d Dr$ sobre $d^2 Ar$, una parte $d Ea$ penetra en Ac y la otra $d Er$ se refleja, más o menos regularmente según el estado de la superficie $d^2 Ar$.

Si se supone que Ac sea ni turbio ni transparente y de espesor suficiente para poder concluir que la energía radiante $d Ea$ penetrada en Ac a través de $d^2 Ar$ sea integralmente absorbida y transformada en energía de otra especie, entonces por el principio de conservación de la energía tenemos que $d Ei = d Ea + d Er$ de donde se deduce que $1 = d Ea/d Ei + d Er/d Ei = Ab + Rf = 1$ en donde Ab y Rf son los factores de absorción y de reflexión o, mejor, la absorbibilidad y reflexividad del elemento $d^2 Ar$ en el intervalo espectral $Ln \vdash Ln + d Ln$, bajo el ángulo de incidencia Ap .

5 Si la absorción es puramente térmica entonces $d Ea$ se transforma completamente en energía térmica dentro de Ac así que $d Ea$ es la cantidad de energía térmica que por medio de un calorímetro-termostato necesita restar a Ac al que pertenece $d^2 Ar$, para que el mismo se mantenga isoterma, y por este motivo Ab se llama también "absorbibilidad de Ac ". Resulta que Ab y Rf son independientes de la intensidad del haz incidente $d Ei$, pero dependen del ángulo de incidencia Ap de la longitud de onda Ln , de la temperatura absoluta Tm .

6 Si recordamos que en la reflexión vítrea la luz reflejada es polarizada, más o menos completamente en el plano de incidencia y que la parte de energía incidente que se refleja es mayor para la energía incidente que compete a las vibraciones del vector eléctrico, que se realizan normalmente al plano de incidencia, entonces podemos afirmar que Ab y Rf además de depender de Ap , de Ln , de Tm , como ya vimos, tienen que depender también del plano de polarización del haz incidente, o, en otras palabras, Ab y Rf son funciones, además de Ap , de Ln , de Tm , también del plano de vibración que se considera.

7 En la emisión puramente térmica el flujo de energía que sale de $d^2 Ar^*$ es debido a una transformación de energía térmica que sucede en el "interior" de Re de manera que el flujo radiante que sale de $d^2 Ar^*$ proviene del interior de Re después de una refracción a través de $d^2 Ar^*$; se sigue que de $d^2 Ar^*$ sale en mayor cantidad energía radiante cuyas vibraciones eléctricas pertenezcan al plano de incidencia.

El porcentaje de energía que puede salir de $d^2 Ar^*$ bajo un ángulo Ap^* depende en-

tonces del estado de polarización así que siendo la energía emitida por $d^2 Ar^*$ más o menos polarizada se deduce que Bl , como Ab y Rf tiene que depender del plano de vibración que se considera.

8 El elemento de superficie $d^2 Ar$ de un aceptor Ac se dice "negro" con respecto a una determinada 4-pla de valores (siendo Pl un parametro que fija el planode polarización) Ln, Tm, Ap, Pl si por la 4-pla misma resulta que $Ab = 1$ y de consecuencia $Rf = 0$.

Un Ac cuya superficie es "negra" y dentro del cual la energía radiante penetrada se transforme íntegramente en energía térmica se llama "cuerpo negro" o, mejor, "radiador negro".

Si se considera una cavidad Cv cuyas paredes sean bien opacas y ennegrecidas con "negro de humo" o "negro de platino" y que tenga un pequeño hoyo Hy , entonces todas las radiaciones que penetran en Cv por Hy son absorbidas por las paredes o a la primera incidencia o después de algunas reflexiones y la parte de energía que puede salir de Hy es absolutamente despreciable; se sigue que el área de Hy es perfectamente negra por cada longitud de onda, bajo cualquier ángulo de incidencia, por cualquier estado de polarización, por cualquier temperatura, de manera que Hy realiza una $d^2 Ar$ perfectamente negra.

Pr 05 Termodinámica y emisión puramente térmica.

0 Según la definición de "emisión puramente térmica" la emisión de energía radiante se hace a expensas de una igual cantidad de energía térmica, es decir que está satisfecho el primer principio de la termodinámica.

1 Si en una cavidad Cv , con paredes Pr perfectamente reflejantes, se encuentran dos cuerpos Cr_1 y Cr_2 , capaces de cambiar energía térmica por energía radiante, y, a menos de Cr_1 , y de Cr_2 , Cv es perfectamente vacía entonces el Cr a temperatura más baja se calienta a expensas de la energía emitida por el cuerpo a temperatura más alta, que a su vez se enfría hasta alcanzar un estado de equilibrio cuando Cr_1 y Cr_2 tengan la misma temperatura.

Nunca se pudo observar que tal sistema a partir de este estado de equilibrio diera lugar a una transformación espontánea con el resultado de que uno de los dos Cr se calentara a expensas de la energía térmica del otro, es decir que está satisfecho el 2º principio de la termodinámica.

2 Considérese una cavidad Cv que contenga, eventualmente, cuerpos Cr_1 y $Cr_2, \dots$ y que por lo demás esté vacía y tal que sus paredes

Pr, impermeables a la energía radiante, y los *Cr* se encuentren a la misma temperatura *Tm*.

En un punto cualquiera *Pc* de *Cv* introduzcase un termómetro capaz de absorber, por lo menos en parte, la energía radiante que sobre el mismo incide, cualquiera sea la longitud de onda *Ln*.

Este termómetro, que conviene tenga prontitud máxima y capacidad térmica mínima, acabará por marcar, él también, la temperatura *Tm*, absorbiendo o emitiendo energía radiante hasta llegar, precisamente, a la temperatura *Tm* de régimen constante. En estas condiciones la *Cv* se encuentra en equilibrio termodinámico a la temperatura *Tm* y es atravesada por "radiación puramente térmica" que la recorre en todas direcciones y en todos sentidos y que es producida por la paredes de *Cv* o por los cuerpos *Cr* o, también, por los termómetros usados para asegurarse del equilibrio térmico alcanzado.

- 3 Si $d^5 I^*$ (que es igual a $d^6 El^*/d Dr$) es el flujo de energía radiante monocromática en el intervalo espectral $Ln \vdash Ln + d Ln$, polarizada en el plano *Pl*, relativo a la superficie $d^2 Ar$ y al ángulo sólido $d^2 As$ cuyo eje *Nr* es normal a $d^2 Ar$ en *Pc* entonces $d^5 I^* = I^* d^2 Ar d^2 As d Ln$ y el coeficiente *Il* se llama "irradiación monocromática específico-longitudinal en el punto *Pc* en la dirección *Nr*, en el intervalo espectral $Ln \vdash Ln + d Ln$ y en el plano de polarización *Pl*.
- 4 En las condiciones de equilibrio térmico I^* tiene que ser constante con respecto a la duración en todos los *Pc* de *Cv*, por cualquiera dirección y sentido, por cualquier plano de polarización, y una tal distribución uniforme de radiación se dice "isótropa", y como I^* tiene que ser independiente de la naturaleza de las paredes de *Cv* se puede concluir que I^* tiene que ser función de *Ln* y de *Tm* únicamente.
- 5 Si la radiación en *Cv* no es polarizada entonces el flujo $d^5 Fl$ de energía radiante "natural" es el doble del flujo de energía polarizada de manera que $d^5 Fl = 2 d^5 Fl^* = 2 I^* d^2 Ar d^2 As d Ln = Il d^2 Ar d^2 As d Ln$ y si el medio que llena la cavidad *Cv* es un cuerpo transparente isótropo, de índice de refracción *Rr*, entonces $Il_{Rr} = Rr^2 Il$.

En efecto, si se considera el mismo ángulo sólido $D^2 As$, el mismo intervalo espectral $Ln \vdash Ln + d Ln$, la misma duración *d Dr* y las dos secciones normales al eje de $d^2 As$, $d^2 Ar_v$, $d^2 Ar$ distantes respectivamente Rm_v *d Dr* y Rm_m *d Dr* de *Pc*, siendo Rm_v y Rm_m las velocidades de la radiación respectivamente en el vacío y en el medio, y siendo entonces Rr que $= Rm_v/Rm_m$ el índice de refracción

absoluto del medio tenemos que

$$Il_v d^2 Ar_v d^2 As d Ln d Dr = d^6 El^* \\ = Il_m d^2 Ar_m d^2 As d Ln d Dr$$

de donde se deduce que

$$Il_v d^2 Ar_v = Il_m d^2 Ar_m \text{ y entonces que}$$

$$Il_m = Il_v (d^2 Ar_v/d^2 Ar_m) = Il_v (Rm_v/Rm_m) \\ = Il_v Rr^2 \text{ o sea que } Il_m = Il_v \cdot Rr^2.$$

- 6 Las demostraciones satisfactorias de las propiedades de *Il* son delicadas, pero, en conclusión, se trata de probar que toda anisotropía de *Il*, toda dependencia de *Il* de la naturaleza de las paredes *Pr* de *Cv*,... permitiría crear en *Cv*, supuesta inicialmente en equilibrio térmico, diferencias de temperatura lo que estaría en contradicción con el 2º principio de la termodinámica.

Pr 06 Densidad de radiación.

- 0 En las condiciones de equilibrio termodinámico, en el vacío, sea $d^3 Vl$ un elemento de volumen alrededor de un punto *Pc* cualquiera de *Cv* y contenido en *Cv*. Divídase $d^3 Vl$ en *mb* elementos de base $d^2 Ar$ y de espesor *d Es*. Por la base relativa a *Es* el flujo relativo al ángulo sólido $d^2 As$ es igual a $I^* d^2 As d Ar cs Ap d Ln$ supuesto polarizado, por ejemplo, en el plano del dibujo.
- 1 Este flujo atraviesa la base relativa a *Sp* con velocidad *Rm* de manera que la energía radiante que "llena" el sub-elemento $D^2 Ar$ *d Es* y proporcionada por el haz de intensidad constante I^* que *ln* atraviesa según la dirección *Nr* es igual a $I^* d^2 As d^2 As cs Ap d Ln (d Es/Rm cs Ap)$ de manera que la energía radiante que "llena" el subelemento $d^2 Ar$ *d Es* y que es proporcionada por todos los haces que lo atraviesan en todas las direcciones es igual a $S (I^* d^2 Ar d Ln d Es/Rm) d^3 As$ que es igual a $4 \pi I^* d^2 Ar d Ln d Es/Rm$ de manera que la energía radiante "natural" (y no "polarizada" en un determinado plano de polarización) contenida en el elemento de volumen $d^3 Vl$ es tal que

$$d^4 El = 2 S (4 \pi I^* d Ln/Rm) (d^2 Ar d Es) \\ = 8 \pi I^* d Ln d^3 Vl/Rm$$

- 2 Es entonces natural definir como "densidad energética monocromática específico-longitudinal" la función *Dl* de *Ln* y de *Tm* tal que $Dl = d^4 El/d^3 Vl d Ln = 8 \pi I^*/Rm$ y en un medio de índice de refracción absoluto *Rr* $Dl_m = Rr^2 \cdot Dl = 8 \pi I^* Rr^2/Rm$ y como "densidad energética integral o total o pancromática la función *Dp* de *Tm* tal que $Dp = (8 \pi/Rm) S_0^{\infty} I^* \cdot d Ln$

Pr 07 Leyes sobre "radiador negro".

- 0 Sea $d^2 Ar^*$ un elemento de superficie de un cuerpo *Cr* o, también, de la pared *Pr* de

una cavidad Cv en que Cr está encerrado, cavidad en equilibrio a la temperatura Tm . Si se considera el ángulo sólido $d^2 As$ cuyo eje es Nr_0 , entonces el flujo relativo al mismo, $d^5 Fl$, se puede expresar como sigue $d^5 Fl = Bl^* d^2 As cs Ap^* d^2 Ar^* d Ln$, en que Bl es la brillantez energética monocromática, específico-longitudinal, en el intervalo espectral $Ln \vdash Ln + d Ln$, por la temperatura Tm , por la dirección Nr_0 , por el plano de polarización Pl .

Se admite que esa energía sea emitida por $d^2 Ar^*$ por emisión térmica, o sea que en $d^2 Ar^*$ una igual cantidad de energía térmica se haya transformado en energía radiante.

- 1 Simultáneamente, en el mismo ángulo sólido $d^2 As$ llega a $d^2 Ar^*$ la energía $Il^* d^2 As d Ln d^2 Ar cs Ap^*$ y de tal energía $d^2 Ar^*$ absorbe la fracción $Ab Il^* d^2 As d Ln d^2 Ar cs Ap^*$, y hay que suponer que esa parte de energía sea efectivamente absorbida por el cuerpo Cr o por la pared Pr de Cv y transformada en energía térmica (el cuerpo Cr debe entonces poseer bastante espesor para evitar una posible transparencia, lo que ya se había supuesto por la pared de Cv).

- 2 En total la variación de flujo a través de $d^2 Ar^*$ es igual a $(Bl^* - Ab Il^*) d^2 As d Ln d^2 Ar^* cs Ap^*$ y en virtud del supuesto equilibrio térmico se debe verificar la siguiente identidad

$$0 = SS_{As} S_{lm} SS_{Ar^*} (Bl^* - Ab Il^*) d^2 As d Ln d^2 Ar^* cs Ap^*$$

en donde la integral tiene que ser extendida a toda la Ar^* de Cr (o la Pr de Cv), a todas las Ln , a todo As , a todo Ap^* y como Il^* es independiente de Cr , de su forma y posición y la precedente identidad tiene que ser verificada por cualquier Cr y por cualquier posición se deduce que

$$0 = Bl^* - Ab Il^*, \text{ o sea que, } Bl^*/Ab = Il^*$$

que es la ley de Kirchhoff

enunciable en palabras como sigue

“en una cavidad Cv isoterma, a la temperatura absoluta Tm , la brillantez Bl^* y la absorbibilidad Ab , por cada elemento $d^2 Ar^*$ de la superficie de un cuerpo (Cr o Pr), por una misma dirección Nr , por un mismo intervalo espectral $Ln \vdash Ln + d Ln$, por un mismo plano Pl de polarización tienen el mismo cociente Il^* y esto por todos los cuerpos Cr , por todas las direcciones, por todos los elementos de superficie $d^2 Ar^*$ por todos los planos de polarización y tal cociente, como su valor Il^* es por lo tanto una función universal de Ln y de Tm , únicamente”.

- 3 Esta ley de Kirchhoff puede generalizarse Todo elemento $d^3 Vl$ de Cv , que se piensa

está lleno de materia ponderable de índice de refracción Rr coopera en la emisión de la radiación en equilibrio térmico, o sea que cada elemento $d^3 Vl$ “crea” energía radiante a expensas de energía térmica. Esta energía radiante emitida por $d^3 Vl$ durante la duración $d Dr$ en el ángulo sólido $d^2 As$, en el intervalo espectral $Ln \vdash Ln + d Ln$, polarizada en un determinado plano Pl es de la forma

$d^7 El = Bl^* d^2 As d Ln d^3 Vl d Dr$, y el flujo emitido entonces

$d^6 Fl = Bl^* d^2 As d Ln d^3 Vl$, en donde Bl^* se puede llamar “brillantez de volumen” de $d^3 Vl$. El mismo $d^3 Vl$ absorbe, o sea transforma en energía térmica la parte $Ab Il_{Rr}^* d^2 As d Ln d^3 Vl$ del haz de flujo de “irradiancia” Il_{Rr}^* (que es igual a $Rr^2 Il^*$) que lo atraviesa de manera que para el equilibrio se necesita la relación $Bl^*/Ab = Il_{Rr}^* = Rr^2 Il^*$.

- 4 Cualitativamente la ley de Kirchhoff se considera probada por la experiencia de la inversión del espectro. La necesidad de tal ley es consecuencia en último análisis del hecho que si un cuerpo Cr encerrado en una cavidad Cv isoterma absorbiera (emitiera) sin emitir (absorber) su temperatura aumentaría (disminuiría) más allá (acá) de aquella de los cuerpos vecinos y a expensas (provecho) de la energía térmica de los mismos, contra el 2º principio de la termodinámica.

- 5 La ley de Kirchhoff fija una relación entre Bl , Ab , Il , que vale solamente en Cv en equilibrio térmico; pero Bl y Ab son coeficientes característicos de Cr , del estado de su superficie, de su temperatura del intervalo espectral, del estado de polarización de la radiación, coeficientes, en total, capaces de caracterizar a las propiedades de emisión y absorción del cuerpo y que el cuerpo conserva también cuando se encuentra fuera de Cv .

- 6 En los cuerpos negros $Ab = 1$ de manera que $Bl = Il$, o sea que la radianza monocromática Il en equilibrio térmico en Cv es igual a la brillantez monocromática del radiador negro, y por este motivo la radiación de intensidad Il (que es igual a Bl) en equilibrio térmico en Cv se llama “radiación negra” y tanto Bl como Il es función universal de Ln y Tm solamente, o sea independiente de la naturaleza del radiador negro, lo que puede expresarse también diciendo que “todos los radiadores negros emiten igualmente”, y como Il no depende del plano de polarización se sigue que “los radiadores negros emiten “luz” natural y no polarizada” y como Il no depende del ángulo Ap entonces la Bl del radiador negro no depende de Ap y por lo tanto se puede afirmar que “por

los radiadores negros vale la 2ª ley de Lambert".

- 7 Son estas condiciones intrínsecas de privilegio que indican el "radiador negro" con preferencia en la búsqueda de la unidad fotométrica fundamental. La emisión del radiador negro no depende, no obstante, del medio transparente en que el mismo está sumergido y precisamente si R_r es el índice de refracción del mismo, tenemos que

$$I_{Rr} = R_r^2 I, \text{ y entonces que } B_{L_{NgRr}} = R_r^2 B_{L_{Ng}}$$

- 8 Puesto que en los radiadores no negros $Ab < 1$ para los mismos la brillantez monocromática Bl está sujeta a la condición $Bl < B_{L_{Ng}}$ o sea, a paridad de Ln y Tm el radiador negro es aquel que emite más (de mayor brillantez) o en otras palabras el radiador negro es el más irradiante entre los cuerpos que a paridad de Tm dan una emisión puramente térmica.

La denominación del radiador negro no es pues, muy feliz, y se prefiere, hoy día, aquella de "radiador integral" o de "radiador Kirchhoff-Lummer.

- 9 La brillantez monocromática negra $B_{L_{Ng}}$ por evidentes razones físicas no puede ser infinita de manera que tienen que ser verificadas las condiciones $Bl \neq 0$ y $Ab \neq 0$ por la misma Ln y Tm lo que puede enunciarse como sigue

"si un radiador emite una radiación (un Ln), a la misma Tm tiene que absorberla" y en efecto esta proposición se verifica en la "inversión del espectro"; pero el recíproco no es verdadero o sea si $Ab \neq 0$ entonces puede que $Bl = 0$ o en otras palabras un cuerpo puede absorber radiaciones que a la misma Tm no emite. Esto se verifica siempre a Tm no muy altas para todas las Ln visibles porque en tales condiciones prácticamente $Bl = 0$ o sea un radiador, también si es negro, a temperaturas bajas no emite luz por pura causa térmica es decir no es incandescente de manera que $Bl = 0$ por cualquier Ln , aún para los que el radiador (no negro) absorbe.

Pr 08 Leyes experimentales sobre "radiador negro".

- 0 Con respecto a la emisión puramente térmica el radiador negro posee una posición de privilegio, como ya decimos, porque su brillantez monocromática, específico-longitudinal Bl es función solamente de Ln y de Tm , e independiente, pues, de la naturaleza del radiador mismo.

Nos preguntamos entonces cuál es la función $Bl(Ln, Tm)$ que da la brillantez monocromática específico-longitudinal o más sencillamente cuál es la función Bp de Tm que

es igual a $S_0^\infty Bl(Ln, Tm) \cdot dLn$ que da la brillantez integral o total o pancromática del radiador negro.

- 1 Para contestar experimentalmente a estas dos preguntas sirven mediciones de la energía radiante emitida por el radiador de Kirchhoff-Lummer que en último análisis es un horno eléctrico a temperatura constante. Del hueco Hc de área $d^2 Ar$ sale energía radiante y por la alta temperatura, energía luminosa.

El área $d^2 Ar$ tiene que ser bastante pequeña, con respecto a la cavidad Cv del horno porque la energía radiante que sale puede ser inmediatamente substituída por emisión de las paredes Pr de Cv de manera que en la Cv misma subsista siempre una radiación en equilibrio térmico.

Entonces un haz $\Delta^2 As$ de radiación que salga de Cv a través de $\Delta^2 Ar$ es un haz de "luz" natural y de intensidad específica $I(Ln, Tm) = 2 I^*(Ln, Tm) = 2 Bl(Ln, Tm)$ y la energía emitida por el área $d^2 Ar$ durante la duración Dr en el intervalo espectral $Ln \vdash Ln + Ln$, en el ángulo sólido $\Delta^2 As$ (cuyo eje es normal a $\Delta^2 Ar$) es $\Delta^6 El$ tal que

$$\begin{aligned} \Delta^6 El &= 2 I^* \Delta^2 As \Delta^2 Ar \Delta Ln \Delta Dr \\ &= 2 Bl \Delta^2 As \Delta^2 Ar \Delta Ln \Delta Dr \end{aligned}$$

de manera que

$$Bl = I^* = \Delta^6 El / 2 \Delta^2 As \Delta^2 Ar \Delta Ln \Delta Dr$$

o sea se mide simultáneamente la Bl monocromática de Cv y la intensidad monocromática de la radiación negra

- 2 Las mediciones de ΔDr y de $\Delta^2 Ar$ son banales mientras que la de $\Delta^6 El$ es muy delicada

para la medición de la energía pancromática $\Delta^5 Ep$ (que es igual a $S_0^\infty \Delta^6 El$ al variar Ln) se necesita recibir la radiación sobre un aceptor integral Ap de capacidad térmica conocida que transforme $\Delta^5 Ep$ en (una igual cantidad de) energía térmica, y para tal fin sirve muy bien un bolómetro o un par termoelectrónico, y se deduce que

$$Bp = S_0^\infty Bl \cdot dLn = \Delta^5 Ep / 2 \Delta^2 As \Delta^2 Ar \Delta Dr$$

- 3 Para medir la brillantez monocromática Bl se necesita interponer entre Hc y Ap un monocromador o más sencillamente un filtro que permita limitar el intervalo espectral $Ln \vdash Ln + \Delta Ln$ que se quiere considerar. Si a lo largo del haz que sale de $\Delta^2 Ar$ se interpone un "nicol" las mediciones precedentes de $\Delta^6 Ep$ o $\Delta^5 Ep$ dan la energía de la radiación considerada polarizada en un plano de manera que no se necesita el factor $1/2$.

- 4 Conocidos Bl y Bp , por medio de las mediciones precedentes se conocen entonces las densidades energéticas monocromática y pancromática de la radiación negra por medio de las fórmulas

$$\begin{aligned} Dl &= 8\pi I^*/Rm = 8\pi Bl^*/Rm \\ Dp &= (8\pi/Rm) S_0^\infty I^* dLn \\ &= (8\pi/Rm) S_0^\infty Bl^* dLn = 8\pi Bp/Rm \end{aligned}$$

- 5 Los resultados de las experiencias se sintetizan en la "curva de Stefan" y en las "isotermas de Lummer-Pringsheim", pero, mientras de la primera se logró encontrar, con cierta facilidad, la imagen analítica, lo mismo no se puede decir para la familia de las segundas.

La ley empírica de Stefan se puede escribir como sigue

$Ep = St^* Tm^4$, *et*, St^* = constante termóptica de Stefan = $5,67 \cdot 10^{-8} \text{ sc}^{-3} \text{ Kg Kl}^{-4}$ y recordando las fórmulas vistas se deduce que

$$\begin{aligned} Dp &= (4\pi/Rm) Bp rd^2 = (4/Rm) \pi Bp rd^2 \\ &= (4/Rm) Ep = (4/Rm) St^* Tm^4 \\ &= (4St^*/Rm) Tm^4 = St \cdot Tm^4 \end{aligned}$$

o sea que

$$Dp = St Tm^4, \text{ et, } St = \text{constante termóptica de Stefan} = 7,57 \cdot 10^{-16} \text{ mt}^{-1} \text{ sc}^{-2} \text{ Kg Kl}^{-4}$$

Cp I Insuficiencia de la termóptica clásica para explicar las leyes sobre "radiación negra".

- 1.0 En el año de 1879 el físico austriaco Stefan (José; Klagenfurt 1835, Viena 1893) aprovechando también de las mediciones hechas por el físico irlandés Tyndall (Juan; Carlow 1820, Halsmere 1893) demuestra experimentalmente, que la relación que liga unívocamente la densidad Dp de la energía radiante pancromática contenida en una cavidad y allí en equilibrio térmico, a su temperatura absoluta Tm es la siguiente:

$$(1.0) Dp = St \cdot Tm^4, \text{ et, } St = \text{constante termóptica de Stefan} = 7,57 \cdot 10^{-16} \text{ m}^{-1} \text{ sc}^{-2} \text{ Kg Kl}^{-4}.$$

- 1.1 En el año de 1884 el físico austriaco Boltzmann (Luis; Viena 1844, Decino 1906) demuestra o, mejor, cree demostrar, la fórmula (1.0) profundizando por una parte los estudios sobre "presión de la radiación" desarrollados en el año de 1874 por el físico italiano Bártoli (Adolfo; Florencia 1851, Florencia 1896) —en donde él mismo hizo empleo sistemático de las entonces no divulgadas "experiencias ideales"—, y por otra parte especificando tratarse de radiación electromagnética, y usando entonces implícitamente de la óptica maxwelliana y de la termodinámica boltzmanniana llegando de tal manera a afirmar que

$$(1.1) Dp = Ar \cdot Tm^4, \text{ et, } Ar = \text{constante (arbitraria) de (una) integración}$$

- 1.2 La afirmación "o, mejor, cree demostrar" insertada en el período precedente es debida al hecho de que no es posible admitir como "demostración" a una secuencia de razonamientos que conduzcan a una fórmula, la (1.1) que si bien es "isomorfa" (en el sentido etimológico a la que se debe explicar, la (1.0), con tiene, no obstante, constantes arbitrarias, la Ar , a diferencia de la última que contiene una constante bien definida (entre los límites de error), la St .

- 1.3 La pregunta que entonces surge espontánea es la siguiente: "el no haber logrado demostrar la (1.0) con el uso de la óptica maxwelliana y de la termodinámica boltzmanniana, y el haber logrado, sin embargo, llegar a la (1.1), ¿débese tomar como debilidad de los teóricos o como debilidad implícita, aunque no reconocida, de la teoría termóptica empleada? Hay que pensar en que si una demostración de la (1.0), en términos de termóptica clásica existiese, la misma no se hubiera escapado a los formidables cerebros de los Boltzmann, de los Wien, de los Planck, ... y entonces aparece evidente la necesidad de encontrar un medio que permita contestar a la pregunta arriba enunciada.

- 1.4 Para demostrar que con la termóptica clásica no se podía explicar la (1.0) es útil poner en evidencia

- 1.40 que la aplicación de una teoría lleva siempre consigo el uso de determinadas constantes que caracterizan a la teoría misma, y que en el caso en cuestión son $Rm = \text{constante óptica de Roemer (Olaf; Aarhus 1644, Copenhague 1710)} = 3,00 \cdot 10^8 \text{ mt sc}^{-1}$

$$\begin{aligned} Bl &= \text{Constante térmica de Boltzmann} \\ &= 1,38 \cdot 10^{-23} \text{ mt}^2 \text{ sc}^{-2} \text{ Kg Kl}^{-1} \end{aligned}$$

- 1.41 que si el álgebra de las magnitudes con el empleo de dichas constantes logra o no logra demostrar la ley en cuestión, entonces, y sólo entonces, podemos concluir que la termóptica clásica puede o no puede mostrar la fórmula (1.0).

- 1.5 Veamos entonces si la termóptica clásica, que por ser caracterizada por las constantes Rm y Bl llamaremos con más precisión "termóptica (Rm, Bl)" puede o no puede demostrar la (1.0) según el criterio arriba enunciado. Si queremos explicarnos, según el álgebra de las magnitudes, la (1.0) basándonos en la "termóptica (Bm, Bl)" debemos proceder como sigue

"como estamos buscando una relación, que ya sabemos debe existir entre Dp, Tm, Rm, Bl , o sea una $0 = fi(Dp, Tm, Rm, Bl)$ el álgebra de las magnitudes nos sugiere buscar los monomios cero dimensionales Cd , efectivamente

dependientes de los argumentos de fi , o sea los monomios Cd tales que, siendo d, t, r, b no todos ceros

$$\ln^0 dr^0 mi^0 tm^0 = Cd = Dp^d Tm^t Rm^r Bl^b = (ln^{-1} dr^{-2} mi)^d (tm)^t (ln dr^{-1})^r$$

$$(ln^2 dr^{-2} mi tm^{-1})^b = ln^{-d+r+2b} dr^{-2d-r-2b} mi^{d+b} tm^{tb} = ln^0 dr^0 mi^0 tm^0$$

de donde se deduce que

$$0 = -d + r + 2b = -2d - r - b = d + b = t - b$$

y entonces que

$$(1.5) \quad d = t = r = b = 0$$

Las (1.5) permiten afirmar que no existe un tal monomio cerodimensional

$Cd = Dp^d Tm^t Rm^r Bl^b$ con d, t, r, b no todos ceros, y por lo tanto y en virtud de lo dicho, podemos concluir que

“la termóptica (Rm, Bl) caracterizada por el grupo de constantes Rm, Bl es insuficiente para demostrar la ley de Stefan

$$Dp = St \cdot Tm^4, \text{ et, } St = 7,57 \cdot 10^{-16} \text{ mt}^{-1} \text{ sc}^{-2} \text{ Kg Kl}^{-4}$$

así que, el análisis hecho, sugiere la explicación del fracaso de Boltzmann, de Wien, de Planck,...

1.6 Aunque sea innecesaria, queremos traer una prueba más, en favor de la afirmado, buscando la relación que debe ligar la densidad energética monocromática Df (ligada a Dp por medio de la relación $Dp = S_\infty^0 Df \cdot d Fr$) de la energía radiante monocromática en el intervalo espectral $Fr \vdash Fr + d Fr$ y contenida en una cavidad Cv y allí en equilibrio térmico, con la temperatura absoluta Tm de la misma, con la frecuencia Fr en el cuadro de la termóptica (Rm, Bl), relación cuya existencia es evidenciada por la familia de las “isotermas” que expresan Df en función de Fr para cada prefijada Tm , y construídas en el año de 1897 por los físicos alemanes. Lummer (Otto; Gers 1860, Breslan 1925) Pringsheim

(Ernesto; Ohlan 1850, Breslan 1917)

y en el año de 1900 por los físicos alemanes también

Rubens (Enrico; 1865, 1922)
Kurlbaum (Hernan 1857, 1927)

1.7 Como la ley que estamos buscando tiene que ser del tipo

$$0 = fi(Df, Fr, Tm, Rm, Bl)$$

el álgebra de las magnitudes nos sugiere buscar los monomios cerodimensionales cuyos factores, no todos aparentes, sean los argumentos de fi , o sea los monomios Cd tales

que siendo d, f, t, r, b no todos ceros,

$$\ln^0 dr^0 mi^0 tm^0 = Cd = Df^d Fr^f Tm^t Rm^r Bl^b = (ln^{-1} dr^{-1} mi)^d (dr^{-1})^f (tm)^t (ln dr^{-1})^b = ln^{-d+r+2b} dr^{-d-f-r-2b} mi^{d+b} tm^{t-b} = ln^0 dr^0 mi^0 tm^0$$

de donde se deduce que

$$0 = -d + r + 2b = -d - f - r - 2b = d + b = t - b$$

de donde, eligiendo a d como variable independiente se deduce que

$$f = -2d, \text{ et, } t = -d, \text{ et, } r = 3d, \text{ et, } b = -d$$

así que los monomios que estamos buscando tienen que ser del tipo Cd tal que

$$Cd = Df^d Fr^{2d} Tm^{-d} Rm^{3d} Bl^{-d} = (Df Fr^{-2} Tm^{1-} Rm^3 Bl^{-1})^d = Cd$$

y por la arbitrariedad de d se puede concluir que los monomios cerodimensionales Cd que estamos buscando son todas potencias y sólo potencias del único monomio Cd tal que

$$Cd = Df Rm^3 Fr^{-2} Tm^{-1} Bl^{-1}$$

y entonces el álgebra de las magnitudes nos sugiere, en virtud de la definición de ley física, que la relación que estamos buscando tiene que ser del tipo tal que

$$0 = fi^*(Ad^* Df Rm^3 Fr^{-2} Tm^{-1} Bl^{-1}) = fi^*(Ad^* Cd)$$

en donde Ad^* es una constante adimensional indeterminada y fi^* una función indeterminada también, de donde resolviendo con respecto a $Ad^* Cd$ y siendo ad^* otra constante adimensional indeterminada (el cero de fi^*), se deduce que

$$ad^* = Ad^* Cd = Ad^* Df Rm^3 Fr^{-2} Tm^{-1} Bl^{-1}$$

de donde indicando con Ad la constante adimensional indeterminada ad^*/Ad^* se deduce que $Df = Ad Bl Fr^2 Tm/Rm^3$

de donde, recordando la presencia del factor 8π en la fórmula que nos da Df en función de Fr y de Tm y aprovechando de la indeterminación de Ad se deduce que

$$(1.7) \quad Df = Ad \cdot 8\pi Bl Fr^2 Tm/Rm^3$$

que a menos del factor adimensional indeterminado Ad es la ley enunciada en el año de 1900 por el físico inglés Strutt (Juan Guillermo, barón de Rayleigh; Langford Grave 1842, Withman 1919) y, por algunos físicos atribuida al físico inglés Jeans (Jaime Hopwood; Londres 1882, Dorking 1946).

1.8 De todo lo que precede se sigue que

“la sola ley que la familia de las “isotermas” de Lummer-Pringsheim declara existente y que la termóptica $Rm Bl$ nos puede proporcionar tiene que ser del tipo (1.7) y efectivamente se puede deducir que

$$(1.8) Df = 8 \pi Bl Fr^2 Tm/Rm^3$$

fórmula que si bien es válida para valores bastante pequeños de Fr/Tm o sea por bajas frecuencias (infrarrojo) o altas temperaturas, sin embargo está en plena contradicción con lo que sugieren las isoterma de Lummer-Pringsheim, porque mientras éstas sugieren que $\lim_{Fr \rightarrow \infty} Df = 0$, la (1.8) sugiere que

$$\lim_{Fr \rightarrow \infty} Df = \infty \text{ es decir que la energía ra-}$$

dian te tendería a pasar al "éter" con las más altas frecuencias (catástrofe del ultravioleto) y además está en contradicción con la ley de Stefan porque mientras ésta afirma que

$$Dp = St. Tm^4 \text{ la (1.8) implica que}$$

$$Dp = S_0^\infty Df. d Fr =$$

$$= S_0^\infty (8 \pi Bl Fr^2 Tm/Rm^3) d Fr =$$

$$= (8 \pi Bl Tm/Rm^3) \Big|_0^\infty (Fr^3/3) = \infty$$

Del análisis desarrollado se puede concluir que nos encontramos frente a una formidable contradicción

"por una parte las experiencias de Stefan y de Lummer-Pringsheim afirman que existen leyes que ligan unívocamente Dp a Tm y Df a Tm y Fr respectivamente mientras que por la otra el álgebra de las magnitudes (confirmada por el fracaso de los esfuerzos de los mejores físicos del fin del siglo XIX) afirma que cualquier termóptica caracterizada por las constantes Rm y Bl es insuficiente para explicar los "datos" de la experiencia.

Cp 2 La nueva termóptica (Rm, Bl, St) es suficiente para explicar las leyes sobre "radiación negra".

2.0 Al llegar a este punto crítico será útil recordar y aclarar que una contradicción en una ciencia es un síntoma de que existen verdades más amplias y perspectivas más sutiles dentro de las cuales debe ser encontrada una reconciliación o mejor dicho una superación más profunda y más sutil de las varias proposiciones, y que si mientras en la lógica formal una contradicción es un desastre o un síntoma de fracaso, en una ciencia es más bien una oportunidad, y en la evolución del saber real indica el primer paso en el avance hacia una victoria.

2.1 Para superar entonces la contradicción, así puesta en evidencia, hay que recurrir de nuevo al álgebra de las magnitudes, y ésta, en efecto, nos sugiere probar sencillamente una termóptica que no esté caracterizada únicamente por el grupo invariantivo (Rm, Bl) sino por el grupo invariantivo (Rm, Bl, X) en donde X es un nuevo invariante (una nueva constante dimensional), y además con la misma sencillez con la cual el álgebra de

las magnitudes a través de la ley de Stefan puso en evidencia la impotencia de la termóptica (Rm, Bl) en explicar las experiencias, así la misma sugiere adoptar, por lo menos en un primer momento, como nuevo invariante X a la misma constante St de Stefan que interviene en la (1.0) y que por lo tanto es del tipo dimensional tal que

$$St = Dp/Tm^4 = \ln^{-1} dr^{-2} mi/tm^4 = \\ = \ln^{-1} dr^{-2} mi tm^{-4}$$

independientemente de Rm y de Bl como es fácil verificar

2.2 Veamos entonces lo que una nueva termóptica caracterizada por el grupo invariantivo (Rm, Bl, St), y que por lo tanto llamaremos "termóptica (Rm, Bl, St)" permite deducir

Es fácil probar que si buscamos la relación que liga la Dp con la Tm en la nueva termóptica encontraremos la fórmula

$Dp = Ad St Tm^4$, et, Ad = constante adimensional indeterminada porque, en efecto, debiendo buscar una ley del tipo

$O = fi(Dp, Tm, Rm, Bl, St)$ el álgebra de las magnitudes nos sugiere buscar en primer lugar los monomios cerodimensionales cuyos factores, no todos aparentes, sean los argumentos de fi , es decir los monomios Cd tales que, siendo d, t, r, b, s no todos ceros

$$\ln^0 dr^0 mi^0 tm^0 = Cd = Dp^d Tm^t Rm^r Bl^b St^s \\ = (\ln^{-1} dr^{-2} mi)^d (tm)^t (\ln^2 dr^{-2} mi tm^{-1})^b \\ (\ln^{-1} dr^{-2} mi tm^{-4})^s = \\ = \ln^{-d+r+2b-s} dr^{-2d-r-2b-2s} \\ mi^{d+b+s} tm^{t-b-4s} = \ln^0 dr^0 mi^0 tm^0$$

de donde se deduce que

$$0 = -d + r + 2b - s = \\ = -2d - r - 2b - 2s = \\ = d + b + s = t - b - 4s$$

de donde, eligiendo a d como variable independiente, se deduce que

$$t = -4d, \text{ et, } r = 0, \text{ et, } b = 0, \text{ et, } s = -d$$

de manera que los monomios cerodimensionales Cd cuyos factores sean los argumentos de fi son todos y solos del tipo tal que

$$Cd = Dp^d Tm^{-4d} Rm^0 Bl^0 St^{-d} = \\ = (Dp St^{-1} Tm^{-4})^d$$

o sea potencias del monomio Cd tal que

$$Cd = Dp St^{-1} Tm^{-4}$$

así que la relación que estamos buscando, en virtud de la definición de ley física que el álgebra de las magnitudes sugiere tiene que ser del tipo

$$0 = fi^*(Ad^* Cd) = fi^*(Ad^* Dp St^{-1} Tm^{-4})$$

en donde Ad^* es una constante adimensional indeterminada y fi^* una función indeterminada también, y de ahí, resolviendo con respecto a $Ad^* Cd$ e indicando con ad^* otra

constante adimensional indeterminada, el cero de fi^* , se deduce que

$$Ad^* = Ad^* Cd = Ad^* Dp St^{-1} Tm^{-4}$$

de donde indicando con Ad a la constante adimensional indeterminada, ad^*/Ad^* se deduce que

$$Dp = Ad \cdot St Tm^4$$

resultado que aunque lo habíamos previsto lo buscamos por el hecho de que el uso de una termóptica (Rm, Bl, St) habría podido conducirnos a un resultado más general que la ley de Stefan.

2.3 Vamos a buscar ahora, con el auxilio de la nueva termóptica (Rm, Bl, St) la relación que debe subsistir entre Df, Tm, Fr , según lo afirman las “isotermas” de Lummer-Pringsheim, y las constantes Rm, Bl, St que caracterizan a la misma termóptica. La relación que estamos buscando siempre podremos escribirla en la forma

$$0 = fi(Df, Fr, Tm, Rm, Bl, St)$$

y entonces el álgebra de las magnitudes nos sugiere determinar los monomios cerodimensionales cuyos factores, no todos aparentes, sean los argumentos de fi , es decir los monomios Cd tales que, siendo d, f, t, r, b, s no todos ceros

$$\begin{aligned} ln^0 dr^0 mi^0 tm^0 &= Cd = \\ &= Df^d Fr^f Tm^t Rm^r Bl^b St^s = \\ &= (ln^{-1} dr^{-1} mi)^d (dr^{-1})^f (tm)^t (ln dr^{-1})^r \\ &= (ln^2 dr^{-2} mi tm^{-1})^b (ln^{-1} dr^{-2} mi tm^{-4})^s = \\ &= ln^{-d+r+2b-s} dr^{-d-f-r-2b-2s} mi^{d+b+s} \\ &tm^{t-b-4s} = ln^0 dr^0 mi^0 tm^0 \end{aligned}$$

de donde se deduce que

$$\begin{aligned} 0 &= -d + r + 2b - s = \\ &= -d - f - r - 2b - 2s = \\ &= d + b + s = t - b - 4s \end{aligned}$$

de donde, eligiendo d y t como variables independientes se deduce que

$$\begin{aligned} f &= -3d - t, et, r = 4d + t, et, b = \\ &= (-4d - t) / 3, et, s = (d + t) / 3 \end{aligned}$$

de manera que los monomios Cd que estamos buscando son todos y solos del tipo tal que

$$\begin{aligned} Cd &= Df^d Fr^{-3d-t} Tm^t Rm^{4d+t} \\ &Bl^{(4-d-t)/3} St^{(d+t)/3} = \\ &= (Df Fr^{-3} Rm^4 Bl^{-4/3} St^{1/3})^d \cdot \\ &(Fr Tm^{-1} Rm^{-1} Bl^{1/3} St^{1/3})^{-t} \end{aligned}$$

o sea son todos y solos productos de potencias de los dos monomios Cd independientes entre si tales que

$$\begin{aligned} Cd_1 &= Df Fr^{-3} Rm^4 Bl^{-4/3} St^{1/3}, et, Cd^2 = \\ &= Fr Tm^{-1} Rm^{-1} Bl^{1/3} St^{1/3} \end{aligned}$$

y entonces, en virtud de la definición de ley física que el álgebra de las magnitudes nos sugiere, podemos afirmar que la relación que estamos buscando tiene que ser del tipo

$$\begin{aligned} 0 &= fi^*(Ad_1^* Cd_1, Ad_2^* Cd_2) = \\ &= (Ad_1^* Df Fr^{-3} Rm^4 Bl^{-4/3} St^{1/3}, \\ &Ad_2^* Fr Tm^{-1} Rm^{-1} Bl^{1/3} St^{1/3}) \end{aligned}$$

en donde Ad_1^* y Ad_2^* son dos constantes adimensionales indeterminadas y fi^* una función indeterminada también, y de ahí, resolviendo con respecto a $Ad_1^* Cd_1$ se deduce que

$$\begin{aligned} Ad_1^* Df Fr^{-3} Rm^4 Bl^{-4/3} St^{1/3} &= \\ &= fe(Ad_2^* Fr Tm^{-1} Rm^{-1} Bl^{1/3} St^{1/3}) \end{aligned}$$

en donde fe es una nueva función indeterminada también, de la cual (ecuación) poniendo

$$Ad_1 = 1/Ad_1^*, Ad = Ad_2^*, pl = fe^{-1}$$

se deduce que

$$\begin{aligned} 2.3 Df &= Ad_1 Bl^{4/3} Fr^3/Rm^4 St^{1/3} \cdot \\ pl(Ad Bl^{1/3} Fr/Rm St^{1/3} Tm) \end{aligned}$$

de manera que podemos concluir, por ahora sólo parcialmente, como sigue “la consideración de la nueva termóptica (Rm, Bl, St) permite llegar, además que a la ley “integral” de Stefan

$$Dp = St Tm^4$$

a la ley “diferencial” de distribución de la densidad energética monocromática

$$\begin{aligned} Df &= Ad_1 Bl^{4/3} Fr^3/Rm^4 St^{1/3} pl \\ &(Ad Bl^{1/3} Fr/Rm St^{1/3} Tm) \end{aligned}$$

en donde Ad_1 y Ad son dos constantes adimensionales indeterminadas y pl una función (función de Planck) indeterminada también.

Cp 3 La termóptica (Rm, Bl, Pl) como racionalización de las constantes características y eliminación de las indeterminaciones numéricas puras.

3.3 Obtenido el resultado enunciado en la conclusión del 2.3 nace el deseo de simplificar la (2.3) y de eliminar, hasta donde sea posible, las indeterminaciones que en la misma aparecen, y entonces si recordamos que la variable Tm se presenta cuando también se presenta la constante Bl ligada a la misma en el producto $Bl Tm$, nos queda bastante natural escribir la (2.3) como sigue

$$\begin{aligned} Df &= Ad_1 (Bl^4 St^{-1} Rm^{-3})^{1/3} Fr^3/Rm^3 \\ pl[Ad (Bl^4 St^{-1} Rm^{-3})^{1/3} Fr/Bl Tm] \end{aligned}$$

y la (2.3) así escrita nos sugiere poner

Pl^* = primera constante dinámica de Planck

$$\begin{aligned} &= (Bl^4 St^{-1} Rm^{-3})^{1/3} = \\ &= [(1,38 \cdot 10^{-23} mt^2 sc^{-2} Kg Kl^{-1})^4 \\ &(7,57 \cdot 10^{-16} mt^{-1} sc^{-2} Kg Kl^{-1})^{-1} \\ &(3,00 \cdot 10^8 mt sc^{-1})^{-3}]^{1/3} = \\ &= 1,21 \cdot 10^{-34} mt^2 sc^{-1} Kg \end{aligned}$$

de manera que la (2.3) se simplifica, habiendo eliminado las irracionalidades que grava-

ban sobre las constantes características y asume la forma

$$Df = Ad_1 Pl^* Fr^3/Rm^3 pl (Ad Pl^* Fr/Bl Tm)$$

3.1 Llegados a este punto podemos afirmar que "si se considera una termóptica caracterizada por las tres constantes dimensionales

Rm = constante óptica de Roemer

$$= 3,00 \cdot 10^8 \text{ mt } sc^{-1}$$

Bl = constante térmica de Boltzmann

$$= 1,38 \cdot 10^{-23} \text{ mt}^2 \text{ } sc^{-2} \text{ Kg } Kt^{-1}$$

Pl^* = 1^3 constante dinámica de Planck

(Max; Kiel 1858, Berlino 1948)

$$= 1,21 \cdot 10^{-34} \text{ mt}^2 \text{ } sc^{-1} \text{ Kg}$$

entonces la misma sugiere la ley integral de Stefan en la forma

$$Dp = Bl^4 Tm^4/Rm^3 Pl^{*3}$$

como es fácil constatar, y la ley diferencial de distribución de la densidad energética monocromática en la forma

$$3.1 \quad Df = Ad_1 Pl^* Fr^3/Rm^3 pl (Ad Pl^* Fr/Bl Tm)$$

en donde, es conveniente recordarlo, aparecen dos indeterminaciones adimensionales Ad_1 y Ad y una indeterminación funcional, la pl . Con lo que precede hemos racionalizado, dimensionalmente, la terna de las constantes que caracterizan a la nueva termóptica.

3.2 Vamos entonces a ver hasta dónde nos es posible eliminar estas indeterminaciones y empezamos recordando que definimos Df por medio de la relación

$$Dp = S_0^\infty Df \cdot d Fr \text{ de manera que}$$

$$Bl^4 Tm^4/Rm^3 Pl^{*3} = Dp = S_0^\infty Df \cdot d Fr =$$

$$= S_0^\infty Ad_1 Pl^* Fr^3 d Fr/Rm^3 \int$$

$$pl (Ad Pl^* Fr/Bl Tm) =$$

$$= (Bl^4 Tm^4/Rm^3 Pl^{*3}) (Ad_1/Ad)$$

$$S_0^\infty (Ad Pl^* Fr/Bl Tm)^3 /$$

$$pl (Ad Pl^* Fr/Bl Tm) \cdot d (Ad Pl^* Fr/Bl Tm)$$

$$= (Ad_1/Ad) (S_0^\infty x^3 dx/pl x)$$

$$(Bl^4 Tm^4/Rm^3 Pl^{*3}) =$$

$$= (Ad_1 In/Ad) (Bl^4 Tm^4/Rm^3 Pl^{*3})$$

en donde indicamos, por mayor sencillez que

$$In = S_0^\infty x^3 dx/pl x$$

Así podemos deducir que

$$Ad_1 In/Ad = 1, \text{ y entonces que } Ad_1 = Ad/In$$

de manera que la (3.1) se simplifica en la siguiente

$$Df = Ad^4 Pl^* Fr^3/In Rm^3$$

$$pl (Ad Pl^* Fr/Bl Tm)$$

y de esta manera las tres indeterminaciones iniciales se han reducido a dos: una numérica, la Ad , y la otra funcional, la pl , que una vez conocida nos permitirá conocer también la In que nos es dada por igualdad

$$In = S_0^\infty x^3 dx/pl x$$

3.3 Si ahora se escribe la (3.2) en la forma

$$(3.3) \quad Df = (Ad^3/In) \cdot (Bl Fr^2 Tm/Rm^3) \cdot$$

$$[(Ad Pl^* Fr/Bl Tm) pl (Ad Pl^* Fr/Bl Tm)]$$

y recordamos la ley de Rayleigh-Jeans en la forma

$$Df = (8 \pi) \cdot (Bl Fr^2 Tm/Rm^3) \cdot 1$$

y recordamos también a un nuevo postulado metodológico sugerido por el álgebra de las magnitudes, y que afirma en el caso en cuestión debe encontrarse la ley de Rayleigh Jeans cuando en la (3.3) se pase al límite por $Pl^* \rightarrow 0$ o sea cuando $Ad Pl^* Fr/Bl Tm \rightarrow 0$ entonces resulta que $Ad^3/In = 8 \pi$, o sea que $Ad^3 = 8 \pi In$, o sea que

$$Ad = (8 \pi In)^{1/3} \text{ y además que } \lim_{x \rightarrow 0} (x/pl x)$$

$= 1$, o sea, recordando la regla de l'Hospital, que $pl 0 = 0$, *et*, $pl^1 0 = 1$ condiciones que nos servirán luego para determinar la hasta ahora indeterminada función $pl x$, de manera que la (3.3) se simplifica aún más en la siguiente

$$(3.3)^* \quad Df = 8 \pi (8 \pi In)^{1/3} Pl^* Fr^3/Rm^3$$

$$pl ((8 \pi In)^{1/3} Pl^* Fr/Bl Tm)$$

en donde las indeterminaciones están entonces reducidas a la sola funcional pl siendo que $In = S_0^\infty x^3 dx/pl x$.

3.4 Si entonces ponemos $Ri = In^{1/3}$ entonces la (3.3)* se puede poner en la forma

$$(3.4) \quad Df = 8 \pi Ri (8 \pi)^{1/3} Pl^* Fr^3/Rm^3$$

$$pl [Ri (8 \pi)^{1/3} Pl^* Fr/Bl Tm]$$

que sugiere poner

$$Pl^{**} = 2^3 \text{ constante dinámica de Planck} =$$

$$= (8 \pi)^{1/3} Pl^* = 3,55 \cdot 10^{-34} \text{ mt}^2 \text{ } sc^{-1} \text{ Kg}$$

y entonces la (3.4) se simplifica aún más en la siguiente

$$(3.4)^* \quad Df = 8 \pi Ri Pl^{**} Fr^3/Rm^3$$

$$pl (Ri Pl^{**} Fr/Bl Tm)$$

en donde la presencia del factor 8π , producto de 2 por 4π recuerda con su primer factor que estamos en presencia de "radiación natural" y no "polarizada" y con su segundo factor que estamos en presencia de una distribución radiante espacial siendo 4π el valor en rd^2 del ángulo sólido esférico

3.5 En este punto podemos concluir, pero por ahora sólo parcialmente, y afirmar que, "si consideramos una termóptica caracterizada por las constantes dimensionales

Rm = constante óptica de Roemer =

$$= 3,00 \cdot 10^8 \text{ mt } sc$$

Bl = constante térmica de Boltzmann =

$$= 1,38 \cdot 10^{-23} \text{ mt}^2 \text{ } sc^{-2} \text{ Kg } Kt^{-1}$$

$Pl^{**} = 2^3$ constante dinámica de Planck =

$$= 3,55 \cdot 10^{-34} \text{ mt}^2 \text{ } sc^{-1} \text{ Kg}$$

entonces tal teoría nos proporciona la ley de Stefan, como es fácil averiguar, en la forma

$$Dp = 8 \pi Bl^4 Tm^4 / Pl^{**3} Rm^3$$

que evidencia el factor 8π de cuyo significado físico hablamos en el 3.4, y la ley de repartición de la densidad energética monocromática en la forma

$$(3.5) \quad Df = 8 \pi Ri Pl^{**} Fr^3 / Rm^3 \\ pl (Ri Pl^{**} Fr / Bl Tm),$$

en donde, es conveniente recordarlo

$$Ri = (S_0^\infty x^3 dx / pl x)^{1/3}$$

de manera que la (3.5) contiene la sola indeterminación funcional $pl x$, que una vez conocida nos permitirá calcular la Ri y por lo tanto la Pl si por los cálculos que han de seguir ponemos para una mayor sencillez que

$$Pl = 3^3 \text{ constante de Planck} = Ri Pl^{**}$$

así que las precedentes dos leyes se pueden escribir todavía más sencillamente como sigue

$$Dp = 8 \pi In Bl^4 Tm^4 / Pl^3 Rm^3$$

$$\text{en donde } In = S_0^\infty x^3 dx / pl x$$

$$(3.5)^* \quad Df = 8 \pi Pl Fr^3 / Rm^3 pl (Pl Fr / Bl Tm)$$

y a esta última queremos llamarla "ley de Wien-Planck" para recordar que en el año de 1894 el físico alemán Wien (Guillermo; Gafken 1864, München 1928) había logrado demostrar, basándose en la termóptica clásica (Rm , Bl) y además en la hipótesis que Df debe poseer un solo máximo por cada prefijada Tm , y a través de una secuencia de razonamientos delicados, difíciles y sutiles que Df tiene que estar ligada a Fr y a Tm por una ley del tipo

$$Df = Cs Fr^3 / fn (Cs^2 Fr / Tm)$$

sin poder, pero, conseguir la determinación ni de Cs_1 ni de Cs_2 ni mucho menos de fn .

Cp 4 Determinación de la función pl de Planck.

4.0 Nace ahora el deseo de determinar también la pl , cuya importancia como factor de la ley universal que caracteriza las relaciones entre "materia" y "éter" había hecho escribir en el año de 1860 al físico alemán Kirchhoff (Gustavo Roberto; Koenisberg 1824, Berlín 1887) "es ist eine Aufgabe von hochster Wichtigkeit diese Function zu finden" en el trabajo que establecía su famosa ley () entre emisión y absorción, ley que abrió el camino al magnífico surgimiento de la espectroscopia, deseo que Planck, en su conferencia dictada en la Real Academia Sueca de Ciencias, en Estocolmo, expresaba con el siguiente período "el objetivo que durante largo tiempo tuve delante de mi mente era la solución de la distribución de la energía radiante en el espectro normal del calor radiante. Gustavo Kirchhoff había demostrado que la naturaleza

de la radiación calorífica es completamente independiente del carácter de los cuerpos radiantes. Tal demostración indicaba pues la existencia de una función universal que tiene que depender exclusivamente de la temperatura y de la longitud de onda, pero de ningún modo de las propiedades de las sustancias en cuestión.

Si esta notable función pudiese ser descubierta entonces sería posible profundizar el conocimiento de las relaciones entre energía y temperatura, relaciones que constituyen el principal problema de la física molecular y por consecuencia de la física molecular considerada en su conjunto".

4.1 Para conseguir el fin arriba enunciado es conveniente recordar que las isotermas de Lummer-Pringsheim sugieren que por cada Tm prefijada existe una y una sola Fr^* para la cual Df se vuelve máxima y entonces Fr^* es, ciertamente, función de Tm en el sentido de Dirichlet, pero, nos preguntamos ¿de qué tipo?

Como buscamos la relación que necesariamente liga unívocamente Fr^* a Tm en el cuadro de la nueva termóptica (Rm , Bl , Pl) se sigue que la misma podremos siempre representarla como sigue

$$0 = fi (Fr^*, Tm, Rm, Bl, Pl)$$

y entonces el álgebra de las magnitudes nos sugiere encontrar los monomios cerodimensionales cuyos factores, no todos aparentes, sean los argumentos de fi , es decir los monomios Cd tales que, siendo f, t, r, b, p no todos zeros

$$ln^0 dr^0 mi^0 tm^0 = Cd = Fr^{*t} Tm^t Rm^r Bl^b Pl^p \\ = (dr^{-1})^t (tm)^t (ln dr^{-1})^r (ln^2 dr^{-2} mi tm^{-1})^b \\ (ln^2 dr^{-1} mi)^p = \\ = ln^{r+2b+2p} . dr^{-t-r-2b-p} . mi^{b+p} . tm^{t-b} = \\ ln^0 dr^0 mi^0 tm^0$$

de donde se deduce que

$$t = -f, \text{ et, } r = 0, \text{ et, } b = -f, \text{ et, } p = f$$

de manera que los monomios Cd que estamos buscando son todos y solos tales que

$$Cd = Fr^{*t} Tm^{-t} Rm^0 Bl^{-t} Pl^t = \\ = (Fr^* Tm^{-1} Bl^{-1} Pl)^t$$

o sea todas y solas las potencias del monomio Cd tal que

$$Cd = Fr^* Tm^{-1} Bl^{-1} Pl$$

y entonces, en virtud de la definición de ley física que el álgebra de las magnitudes nos sugiere se deduce que la relación que estamos buscando debe ser del tipo

$$0 = fi^* (Ad^* Cd) = fi^* (Ad^* Fr^* Pl Tm^{-1} Bl^{-1})$$

en donde Ad^* es una constante adimensional indeterminada y fi^* una función indeterminada también, y de ahí, resolviendo con respecto a $Ad^* Cd$ e indicando con ad^* una

nueva constante adimensional indeterminada, el cero de f^* , se deduce que

$$ad^* = Ad^* Fr^* Pl Bl^{-1} Tm^{-1}$$

de donde indicando con Af la constante adimensional indeterminada ad^*/Ad^* , se deduce que

$$Fr^* = Af Bl Tm / Pl$$

que es la primera ley de Wien o del desplazamiento expresada en términos de frecuencias, ley que explica el hecho de que "aumentando Tm aumenta, proporcionalmente, Fr^* o sea la frecuencia por la cual Df es máxima", y como la experiencia (las isothermas de Lummer-Pringsheim) nos sugiere que

$$Fr^* = Wf^* Tm, \text{ et, } Wf^* = \text{constante termópica de Wien} = 5,88 \cdot 10^{10} \text{ } \text{Sc}^{-1} \text{ Kt}^{-1}$$

se sigue la relación $Af Bl / Pl = Wf^*$

de donde se deduce que

$$(4.1) \quad Af = Wf^* Pl / Bl$$

Además, como Fr^* es el valor de Fr maximante Df se deduce que

$$\begin{aligned} 0 &= D_{Fr^*} Df = \\ D_{Fr^*} [8 \pi Pl Fr^{*3} / Rm^3 pl (Pl Fr^* / Bl Tm)] &= \\ = (8 \pi Bl^3 Tm^3 / Rm^3 Pl^2) D_{Fr^*} Pl / Bl Tm &= \\ [(Pl Fr^* / Bl Tm)^3 / pl (Pl Fr^* / Bl Tm)] &= \\ = (8 \pi Bl^3 Tm^3 / Rm^3 Pl^2) D_{Af} (Af^3 / pl Af) &= \\ = (8 \pi Bl^3 Tm^3 / Rm^3 Pl^2) &= \\ (Af^2 / pl^2 Af) (3 pl Af - Af \cdot pl^1 Af) &= 0 \end{aligned}$$

de donde, recordando la (4.1) se deduce que

$$(4.1)^* \quad 0 = 3 pl (Wf^* Pl / Bl) - (Wf^* Pl / Bl) pl^1 (Wf^* Pl / Bl)$$

4.2 Vamos ahora a calcular el valor máximo de Df que indicaremos con Lf^* ; recordando la (4.1) se tiene que

$$\begin{aligned} Df^* &= 8 \pi Pl Fr^{*3} / Rm^3 pl (Pl Fr^* / Bl Tm) = \\ &= 8 \pi Bl^3 Tm^3 Af^3 / Rm^3 Pl^2 pl Af = \\ [8 \pi Wf^{*3} Pl / Rm^3 pl (Wf^* Pl / Bl)] Tm^3 &= Df^3 \end{aligned}$$

y como la experiencia (las isothermas de Lummer-Pringsheim) sugiere que

$$\begin{aligned} Df^* &= Wf Tm^3, \text{ et, } Wf = \\ &= 7,95 \cdot 10^{-27} \text{ mt}^{-1} \text{ sc}^{-1} \text{ Kg Kt}^{-3} \end{aligned}$$

se sigue la relación

$$Wf = 8 \pi Wf^{*3} Pl / Rm^3 pl (Wf^* Pl / Bl)$$

de donde se deduce que

$$(4.2)^* \quad pl (Wf^* Pl / Bl) = 8 \pi Wf^* Pl / Rm^3 Wf$$

Si ahora recordamos los valores de las constantes, que encontramos durante nuestra búsqueda, podremos simplificar las (4.2) y (4.2)* calculando los monomios cerodimensionales que en las mismas intervienen, y precisamente

$$\begin{aligned} Wf^* Bl^{-1} Pl &= \\ &= 5,88 \cdot 10^{10} \cdot 1,38^{-1} \cdot 10^{23} \cdot 3,55 \cdot 10^{-34} Ri = \\ &= 1,51 Ri \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 8 \pi Wf^{*3} Rm^{-3} Wf^{-1} Pl &= 8 \cdot 3,14 \cdot 5,88^3 \cdot 10^{30} \cdot \\ 3,00^{-3} \cdot 10^{-24} \cdot 7,95^{-1} \cdot 10^{27} \cdot 3,25 \cdot 10^{-34} Ri &= \\ &= 8,66 Ri \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 24 \pi Wf^{*2} Bl Rm^{-3} Wf^{-1} &= 24 \cdot 3,14 \cdot 5,88^2 \cdot 10^{20} \cdot \\ 1,38 \cdot 10^{-23} \cdot 3,00^{-3} \cdot 10^{-24} \cdot 7,95^{-1} \cdot 10^{27} &= 16,8 \end{aligned}$$

y substituyendo estos valores en aquellos

$$\begin{aligned} pl (1,51 Ri) &= \\ &= 8,66 Ri, \text{ et, } pl^1 (1,51 Ri) = 16,8 \end{aligned}$$

de donde recordando el valor de Ri se deduce que

$$\begin{aligned} pl [1,51 (S_0^\infty x^3 dx / pl x)^{1/3}] &= \\ &= 8,66 (S_0^\infty x^3 dx / pl x)^{1/3} \end{aligned}$$

$$pl^1 [1,51 (S_0^\infty x^3 dx / pl x)^{1/3}] = 16,8$$

que son ecuaciones funcionales, diferenciales, integrales, singulares de un tipo bastante complicado y poco conocido y que permiten también si no sabemos resolverlas, la búsqueda de $pl x$ con un mínimo de pruebas

4.3 Como nuestra tarea es la de determinar la $pl x$ y los conocimientos que tenemos no nos permiten resolver las ecuaciones que hasta ahora poseemos

$$\left\{ \begin{array}{l} pl 0 = 0 \\ pl^1 0 = 1 \end{array} \right\} \text{ et } \left\{ \begin{array}{l} pl (1,51 Ri) = 8,66 Ri \\ pl^1 (1,51 Ri) = 16,8 \end{array} \right\}$$

$$\text{et } Ri = (S_0^\infty x^3 dx / pl x)^{1/3}$$

entonces resulta conveniente considerar, indicando con Ln la longitud de onda, la función Dl , densidad energética monocromática en el intervalo espectral

$$\begin{aligned} Ln \vdash Ln + d Ln \text{ y tal que } Dp &= \\ &= S_0^\infty Dl \cdot d Ln \text{ y entonces} \end{aligned}$$

$$Dl \cdot d Ln = Df \cdot d Fr \text{ de donde recordando que } Ln \cdot Fr = Rm \text{ se deduce que}$$

$$\begin{aligned} Dl &= - Df d Fr / d Ln = \\ &= - [8 \pi Pl (Rm / Ln)^3 / Rm^3 pl \\ &\quad (Pl Rm / Ln Bl Rm)] (-Rm / Ln^2) = \\ &= 8 \pi Rm Pl / Ln^5 pl (Rm Pl / Bl Tm Ln) \end{aligned}$$

o sea que

$$(4.3) \quad Dl = 8 \pi Rm Pl / Ln^5 pl (Rm Pl / Bl Tm Ln)$$

Si se integra la (4.3) para deducir Dp no se logrará algún nuevo resultado porque tendremos que

$$\begin{aligned} 8 \pi F_n Bl^4 Tm^4 / Rm^3 Pl^3 &= Dp = S_0^\infty Dl \cdot d Ln \\ &= S_0^\infty [8 \pi Rm Pl / Ln^5 pl (Rm Pl / Bl Tm Ln)] \\ d Ln &= 8 \pi Rm Pl (Bl Tm / Rm Pl)^4 \\ S_0^\infty [(Rm Pl / Bl Tm)^3 / pl (Rm Pl / \\ &\quad Bl Tm Ln)] \cdot d (-Rm Pl / Bl Tm Ln) \\ &= 8 \pi Bl^4 Tm^4 / Rm^3 Pl^3 \cdot S_0^\infty x^3 dx / Pl x = \\ &= 8 \pi In Bl^4 Tm^4 / Rm^3 Pl^3 \end{aligned}$$

o sea una identidad como habíamos previsto.

4.4 Así como existe una y una sola Fr^* maximante Df por cada prefijada Tm , así una Ln^* maximante Dl y entonces Ln^* , como Fr^* , es una función de Tm en el sentido de Dirichlet,

y por lo tanto en la nueva termóptica (Rm , Bl , Pl) tiene que existir una relación del tipo $0 = fi(Ln^*, Tm, Rm, Bl, Pl)$ y entonces el álgebra de las magnitudes sugiere buscar los monomios cerodimensionales cuyos factores, no todos aparentes, sean los argumentos de fi , es decir los monomios Cd tales que siendo l, t, r, b, p no todos ceros $ln^0 dr^0 mi^0 tm^0 = Cd = ln^{*1} Tm^t Rm^r Bl^b Pl^p = (ln)^1 (Tm)^t (ln dr^{-1})^r (ln^2 dr^{-2} mi tm^{-1})^b (ln^2 dr^{-1} mi)^p = ln^{1+r+2b+2p} . dr^{-r-2b-p} . mi^{b+p} . tm^{t-b} = ln^0 dr^0 mi^0 tm^0$

de donde, eligiendo a l como variable independiente se deduce que

$$t = l, et, r = -l, et, b = l, et, p = l$$

de manera que los monomios Cd que estamos buscando son todos y solos tales que

$$Cd = Ln^{-1} Tm^1 Rm^{-1} Bl^1 Pl^{-1} = (Ln^* Tm Rm^{-1} Bl Pl^{-1})^1$$

y entonces todas y solas las potencias del monomio tal que

$$Cd = Ln^* Tm Rm^{-1} Bl Pl^{-1}$$

así que la relación que estamos buscando, en virtud de la definición de ley física que el álgebra de las magnitudes nos sugiere tiene que ser del tipo

$$0 = fi^*(Ad^* Cd) = fi^*(Ad^* Ln^* Tm Rm^{-1} Bl Pl^{-1})$$

siendo Ad^* una constante adimensional indeterminada y fi^* una función indeterminada también, de donde, resolviendo con respecto a $Ad^* Cd$ e indicando con ad^* otra constante adimensional indeterminada, el cero de fi^* , se deduce que $ad^* = Ad^* Ln^* Bl Tm Rm^{-1} Pl^{-1}$

de donde, indicando con Al la constante indeterminada adimensional Ad^*/Ad^* se deduce que

$$Ln^* = Rm Pl/Al Bl Tm$$

y como la experiencia (las isothermas de Lummer-Pringsheim en función de Ln) sugieren que

$$Ln^* = Wl^*/Tm, et, Wl^* = \text{constante termóptica de Wien} = 2,99 \cdot 10^{-3} \text{ mt Kl}$$

se deduce la relación $Wl^* = Rm Pl/Al Bl$ de donde se deduce que

$$(4.4) Al = Rm Pl/Bl Wl^*$$

Además, como Ln^* es el valor de Ln maxímante Dl se deduce que

$$\begin{aligned} 0 &= D_{Ln^*} Dl = D_{Ln} \\ [8 \pi Rm Pl/Ln^{*5} pl (Rm Pl/Rm Tm Ln^*)] &= \\ &= (8 \pi Bl^5 Tm^5/Rm^4 Pl^4) D_{Bl Tm Ln^*}/Rm Pl \\ &[(Rm Pl/Bl Tm Ln^*)^5 / \\ &pl (Rm Pl/Bl Tm Ln^*)] = \\ &= (8 \pi Bl^5 Tm^5/Rm^4 Pl^4) D_{1/Al} (Al^5/pl Al) = \\ &= (8 \pi (Bl^5 Tm^5/Rm^4 Pl^4) \\ &D_{Al} [1/al^5 pl (1/al)] = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= (8 \pi Bl^5 Tm^5/Rm^4 Pl^4) [-5 al^4 pl (1/al) \\ &- al^5 (-1/al^2) pl^1 (1/al)/al^{10} pl^2 (1/al) = \\ &= (8 \pi Bl^5 Tm^5 al^6/Rm^4 Pl^4 pl^2 Al) \\ &(5 pl Al - Al pl^1 Al) = 0 \text{ o sea que} \\ &0 = 5 pl Al - Al pl^1 Al \end{aligned}$$

de donde recordando la (4.4) se deduce que

$$(4.4)^* 0 = 5 pl (Rm Pl/Bl Wl^*) - (Rm Pl/Bl Wl^*) \cdot pl^1 (Rm Pl/Bl Wl^*)$$

4.5 Si se indica con Dl^* el valor máximo de Dl se deduce que

$$\begin{aligned} Dl &= 8 \pi Rm/Ln^{*5} pl (Rm Pl/Bl Tm Ln^*) = \\ &= 8 \pi Rm Pl/(Wl^*/Tm)^5 pl (Rm Pl/Bl Wl^*) = \\ &= [8 \pi Rm Pl/Wl^{*5} pl (Rm Pl/Bl Wl^*)] \cdot Tm^5 \end{aligned}$$

o sea que

$$Dl^* = [8 \pi Rm Pl/Wl^{*5} pl (Rm Pl/Bl Wl^*)] \cdot Tm^5$$

y como la experiencia (las isothermas de Lummer-Pringsheim) sugieren que

$$Dl^* = Wl Tm^5, et, Wl = 1,72 \cdot 10^{-13} \text{ mt}^{-2} \text{ sc}^{-2} \text{ Kg Kl}^{-5}$$

así se deduce que

$$Wl = 8 \pi Rm Pl/Wl^{*5} pl (Rm Pl/Bl Wl^*)$$

de donde se deduce que

$$(4.5) pl (Rm Pl/Bl Wl^*) = 8 \pi Rm Pl/Wl^{*5} Wl$$

de donde recordando la (4.4)* se deduce que

$$(4.5)^* pl (Rm Pl/Bl Wl^*) = 40 \pi Bl/Wl Wl^{*4}$$

Si entonces se recuerdan los valores de las constantes encontradas durante nuestra investigación se pueden simplificar las (4.5) y (4.5)* calculando los monomios cerodimensionales que en las mismas aparecen, y precisamente

$$\begin{aligned} Rm Bl^{-1} Wl^{*-1} Pl &= 3,00 \cdot 10^8 \cdot 1,38^{1-} \cdot \\ &10^{-23} \cdot 3,55 \cdot 10^{-34} Ri = 2,66 Ri \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 8 \pi Rm Wl^{*5} Wl^{-1} Pl &= 8 \cdot 3,14 \cdot 3,00 \cdot 10^8 \cdot \\ &2,99^{-5} \cdot 10^{15} \cdot 1,72^{-1} \cdot 10^{13} \cdot 3,55 \cdot 10^{-34} \cdot Ri = \\ &= 76,3 Ri \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 40 \pi Bl Wl^{*4} Wl^{-1} &= 40 \cdot 3,14 \cdot 1,38 \cdot 10^{23} \cdot \\ &2,99^{-4} \cdot 10^{12} \cdot 1,72^{-1} \cdot 10^{13} = 143 \end{aligned}$$

y sustituyendo estos valores en aquellas se deduce que

$$pl (2,66 Ri) = 76,3 Ri, et, pl^1 (2,66 Ri) = 143$$

de donde recordando el valor de Ri sugerido por la (3.5) se deduce que

$$\begin{aligned} pl [2,66 (S_0 \infty x^3 dx/pl x)^{1/3}] &= \\ &= 76,3 (S_0 \infty x dx/pl x)^{1/3} \end{aligned}$$

$$pl^1 [2,66 (S_0 \infty x^3 dx/pl x)^{1/3}] = 143$$

que como las (4.2) y (4.2)* son ecuaciones funcionales diferenciales integrales singulares de un tipo bastante complicado, mas que permiten, también si no se saben resolver, la búsqueda de un pl con un mínimo de tentativas.

4.6 Como los conocimientos que poseemos sobre las ecuaciones que encontramos y que es conveniente reunir en el sistema

$$(4.6) \left\{ \begin{array}{l} pl\ 0 = 0 \\ pl^I\ 0 = 1 \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} pl\ (1,51\ Ri) = 8,67\ Ri \\ pl^I\ (1,51\ Ri) = 16,8 \end{array} \right\}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} pl\ (2,66\ Ri) = 76,3\ Ri \\ pl^I\ (2,66\ Ri) = 143 \end{array} \right\}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} Ri = In^{1/3} \\ In = S_0^\infty \int x^3 dx / pl\ x \end{array} \right\}$$

no nos permiten, por lo menos con cierta facilidad, encontrar la forma de la función pl hasta ahora indeterminada, así se tratará de alcanzar la misma a través de las siguientes consideraciones: "en la relación que llamamos ley de Wien

$$Df = 8 \pi Pl Fr^3 / Rm^3 pl (Pl Fr / Bl Tm)$$

póngase en evidencia lo que todavía queda incógnito, y precisamente pl y Ri , en la manera siguiente

$$Df = 8 \pi Ri Pl^{**} Fr / Rm^3 pl$$

$$(Ri Pl^{**} Fr / Bl Tm) =$$

$$= (8 \pi Pl^{**} Fr^3 / Rm^3)$$

$$(Ri / pl (Ri Pl^{**} Fr / Bl Tm)) = Df$$

de manera que aislándolo se deduce que

$$pl (Ri \cdot Pl^{**} Fr / Bl Tm) / Ri =$$

$$= 8 \pi Pl^{**} Fr^3 / Rm^3 Df$$

así que si elegimos como nuevas variables X e Y tales que

$$X = Pl^{**} Fr / Bl Tm, \text{ et, } Y =$$

$$= lg (8 \pi Pl^{**} Fr^3 / Rm^3 Df)$$

se encuentra que entre X e Y tiene que subsistir la siguiente relación

$$Y = lg (8 \pi Pl^{**} Fr^3 / Rm^3 Df) =$$

$$= lg [pl (Ri Pl^{**} Fr / Bl Tm) / Ri] =$$

$$= lg [pl (Ri X) / Ri] = lg pl$$

$$(Ri X) - lg Ri = Y$$

o sea que

$$(4.6)^* Y = lg pl (Ri X) - lg Ri$$

relación de la cual las isothermas de Lummer-Pringsheim permiten construir el gráfico, y, eso es fundamental, relación en la que una de las incógnitas, $ln Ri$, se presenta aislada.

4.7 El gráfico de la (4.6)* construido por medio de las isothermas de Lummer-Pringsheim indica que para valores de X bastante grandes la (4.6)* puede ser substituída por la relación lineal

$$Y = 0,81 X - 0,27$$

de manera que confrontando esta última con la (4.6)* se deduce que

$$lg Ri = 0,27, \text{ et, } lg pl (Ri X) = 0,81 X$$

de donde se deduce que

$$Ri = lg^* 0,27 = 1,87, \text{ y entonces,}$$

$$In = Ri^3 = 1,87^3 = 6,50, \text{ y además}$$

$$pl (Ri X) = pl (1,87 X) = lg^* (0,81 X) =$$

$$= 10^{0,81 X} = e^{1,87 X} = e^{Ri X} \text{ o sea que}$$

$pl (Ri X) = e^{Ri X}$ por X bastante grande y por lo tanto las ecuaciones (4.6) se simplifican como sigue

$$\left\{ \begin{array}{l} pl\ 0 = 0 \\ pl^I\ 0 = 1 \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} pl\ 2,82 = 15,8 \\ pl^I\ 2,82 = 16,8 \end{array} \right\}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} pl\ 4,97 = 142 \\ pl^I\ 4,97 = 143 \end{array} \right\} S_0^\infty \int x^3 dx / pl\ x = 6,50$$

de manera que el problema de encontrar la pl se ha reducido por fin al problema que encabeza el 4.8, y además podemos afirmar que la constante dinámica Pl de Planck, es tal que

$$Pl = Ri Pl^{**} = 1,87 \cdot 3,55 \cdot 10^{-34} \text{ mt}^2 \text{ sc}^{-1} \text{ Kg} =$$

$$= 6,62 \cdot 10^{-34} \text{ mt}^2 \text{ sc}^{-1} \text{ Kg}$$

4.8 Como decimos al finalizar el 4.7 el problema de encontrar pl se reduce a "determinar pl tal que por x bastante grande $pl\ x = e^x$ y

$$\left\{ \begin{array}{l} pl\ 0 = 0 \\ pl^I\ 0 = 1 \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} pl\ 2,82 = 15,8 \\ pl^I\ 2,82 = 16,8 \end{array} \right\}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} pl\ 4,97 = 142 \\ pl^I\ 4,97 = 143 \end{array} \right\} S_0^\infty \int x^3 dx / pl\ x = 6,50$$

La primera condición con las dos primeras ecuaciones sugiere en seguida que $pl\ x = e^x - 1$ porque entonces por valores bastante grandes de x , $pl\ x = e^x$ y $pl\ 0 = e^0 - 1 = 0$, y $pl^I\ 0 = e^x = 1$, y además tenemos que

$$pl^I\ 2,82 = e^{2,82} = 16,8, \text{ y, } pl\ 2,82 =$$

$$= e^{2,82} - 1 = 16,8 - 1 = 15,8, \text{ y,}$$

$$pl^I\ 4,97 = e^{4,97} = 143, \text{ y, } pl\ 4,97 =$$

$$= e^{4,97} - 1 = 143 - 1 = 142, \text{ y,}$$

$$S_0^\infty \int x^3 dx / pl\ x = S_0^\infty \int x^3 dx / (e^x - 1) =$$

$$= \pi^4 / 15 = 6,50$$

de manera que podemos afirmar que pl tal que $pl\ x = e^x - 1$ es la solución del problema abierto con el descubrimiento de las leyes de Kirchhoff, solución que satisface con óptima aproximación las condiciones requeridas por la experiencia.

Concluyendo podemos afirmar que

"La teoría de la radiación negra está levantada sobre las bases de una termóptica caracterizada por las constantes dimensionales

$$Rm = \text{constante óptica de Roemer}$$

$$= 3,00 \cdot 10^8 \text{ mt sc}^{-1}$$

$$Bl = \text{constante térmica de Boltzmann}$$

$$= 1,38 \cdot 10^{-23} \text{ mt}^2 \text{ sc}^{-2} \text{ Kg KI}^{-1}$$

$$Pl = \text{constante dinámica de Planck}$$

$$= 6,62 \cdot 10^{-34} \text{ mt}^2 \text{ sc}^{-1} \text{ Kg}$$

y determinada por la ley fundamental de distribución de la densidad energética específica monocromática

$$Df = (8 \pi Pl Fr^3 / Rm^3).$$

$$[e \vdash (Pl Fr / Bl Tm) - 1]$$

que es la ley descubierta por Planck en el 1901 después de veinte años de búsquedas como el mismo Planck lo afirma.

Ch. 5 Deducción de la hipótesis cuantística.

5.0 Ahora que tenemos la ley fundamental que rige el fenómeno de la "radiación negra", ley deducida usando solamente los "datos de la experiencia", ley de Stefan y curvas de Lummer-Pringsheim, y que, por lo tanto podemos estar satisfechos desde el punto de vista del "abstractismo" o del "positivismo", deseamos también estar satisfechos desde el punto de vista del "modelismo" o "intuicionismo" (no el del Wiener Kreis) y entonces queremos demostrar que la (4.8) sugiere "necesariamente" el "modelo cuantístico".

5.1 Empezamos con buscar el número $d Fc$ de las "frecuencias características" o "grados de libertad" relativos al intervalo espectral $Fr \vdash Fr + d Fr$, y propias del volumen Vl de la cavidad Cv en que está encerrada energía radiante en equilibrio térmico, en el cuadro de una teoría óptica caracterizada por Rm .

La relación que estamos buscando se puede representar así

$$0 = fi(d Fc, Fr, d Fr, Vl, Rm)$$

Podrá parecer que el álgebra de las magnitudes, en este caso tenga que fracasar porque lo que estamos buscando, o sea $d Fc$ es una variable adimensional. Pero es fácil pensar que $d Fc$ tenga que ser proporcional directamente a $d Fr$ y a Vl , y entonces la relación que estamos buscando podemos representarla como sigue

$$0 = fi(d Fc/Vl \cdot d Fr, Fr, Rm)$$

y entonces el álgebra de las magnitudes nos sugiere buscar los monomios cerodimensionales cuyos factores, no todos aparentes, sean los argumentos de fi , es decir los monomios Cd tales que siendo c, f, r no todos ceros $\ln^0 dr^0 = Cd = (d Fc/Vl d Fr)^c Fr^f Rm^r = (\ln^{-3} dr)^c (\ln dr^{-1})^r = \ln^{-3c+r} \cdot dr^{c-f-r} = \ln^0 dr^0$

de donde se deduce que

$$0 = -3c + r = c - f - r$$

de donde eligiendo a c como variable independiente, se deduce que

$$f = -2c, et, r = 3c$$

de manera que los monomios Cd que estamos buscando son todos y solos tales que

$$Cd = (d Fc/Vl d Fr)^c Fr^{-2} Rm^{3c} = (d Fc Vl^{-1} (d Fr)^{1-} Fr^{-2} Rm^3)^c$$

y entonces todas y solas potencias del monomio Cd tal que

$$Cd = d Fc Rm^3 Vl^{-1} Fr^{-2} (d Fr)^{-1}$$

así que la relación que estamos buscando debe ser del siguiente tipo en virtud de la definición de ley física que el álgebra de las magnitudes nos sugiere

$$0 = fi^*(Ad^* Cd) = fi^*(Ad^* d Fc Rm^3 Vl^{-1} Fr^{-2} (d Fr)^{-1})$$

en donde Ad^* es una constante adimensional indeterminada y fi^* una función indeterminada también, de donde resolviendo con respecto a $Ad^* Cd$ e indicando con ad^* una nueva constante adimensional indeterminada, el cero de fi^* , se deduce que

$$ad^* = Ad^* d Fc Rm^3 / Vl Fr^2 d Fr$$

de donde indicando con Ad a la constante, adimensional indeterminada ad^*/Ad^* se deduce que

$$(5.1) d Fc = Ad \cdot Vl Fr^2 d Fr / Rm^3$$

Si en este punto recordamos que estamos hablando de "luz natural" y no "polarizada" y de "distribución energética radiante espacial" entonces es fácil convencerse que la constante Ad tiene que ser igual a 2.4π en donde el factor 2 aparece porque la radiación es "natural" y el factor 4π porque la distribución es "radiante espacial", de manera que la (5.1) podemos especificarla en la relación que sigue

$$d Fc = 8 \pi Vl Fr^2 d Fr / Rm^3$$

que es la fórmula demostrada por Rayleigh en el año de 1900.

5.2 Si ahora recordamos que con Df indicamos la densidad energética específica monocromática, entonces podemos afirmar que la energía radiante monocromática $d Em$, relativa al intervalo espectral $Fr \vdash Fr + d Fr$, contenida en el volumen Vl y allí en equilibrio térmico a la temperatura Tm se puede expresar como sigue

$$\begin{aligned} d Em &= Vl \cdot Df d Fr = \\ &= Vl [8 \pi Pl Fr^3 / Rm^3 (e^{Pl Fr/B1 Tm} - 1)] \cdot d Fr \\ &= (8 \pi Vl Fr^2 d Fr / Rm^3) \cdot \\ &= Pl Fr / (e^{Pl Fr/B1 Tm} - 1) = \\ &= d Fc \cdot Pl Fr / (e^x - 1) = \\ &= d Fc Pl Fr (-1 + e^x) [-e^x / (e^x - 1)^2] \\ &= d Fc Pl Fr (-1 + e^x) D_x [1 / (e^x - 1)] = \\ &= d Fc Pl Fr (-1 + e^x) D_x \\ &= [e^x / (1 - e^x)] = d Fc Pl Fr (-1 e^x) D_x \\ &= [e^x (1 + e^x + e^{2x} + \dots)] = \\ &= d Fc Pl Fr (-1 + e^x) D_x \\ &= (e^x + e^{2x} + e^{3x} + \dots) = \\ &= d Fc Pl Fr (-1 + e^x) \\ &= (-e^x - 2e^{2x} - 3e^{3x} \dots) = \\ &= d Fc Pl Fr (1 - e^x) \\ &= (0 \cdot e^{0x} + 1 \cdot e^{-x} + 2 \cdot e^{-2x} + \dots) = \\ &= d Fc Pl Fr (1 - e^x) \sum_{x=0}^{\infty} x e^{-x} = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= d Fc \cdot \sum_0^{\infty} [(1 - e^{-x}) e^{-x} \cdot x Pl Fr] = \\
&= d Fc \sum_0^{\infty} [Fc (1 - e^{-x}) e^{-x} \cdot x Pl Fr] / Fc \\
&= d Fc \cdot \sum_0^{\infty} [Fc (1 - e^{-Pl Fr / Bl Tm}) \\
&\quad e^{-x Pl Fr / Bl Tm}] \cdot (x Pl Fr) / Fc = \\
&= d Fc (\sum_0^{\infty} Fc_x \cdot J_{0x}) / \sum_0^{\infty} Fc_x = d Fc \cdot Ef
\end{aligned}$$

en donde pusimos sucesivamente

$$\begin{aligned}
d Fc &= 8 \pi Vl Fr^2 d Fr / Rm^3, \text{ et, } X = \\
&= Pl Fr / Bl Tm, \text{ et, } \\
Fc_x &= Fc (1 - e^{-Pl Fr / Bl Tm}) e^{-x Pl Fr / Bl Tm}, \text{ et, } \\
Ef_x &= x Pl Fr, \text{ et, } Ef = \\
&= (\sum_0^{\infty} Ef_x Fc_x) / (\sum_0^{\infty} Fc_x)
\end{aligned}$$

y notando que

$$\begin{aligned}
\sum_0^{\infty} x Fc_x &= \sum_0^{\infty} x Fc (1 - e^{-Pl Fr / Bl Tm}) \\
e^{-x Pl Fr / Bl Tm} &= Fc
\end{aligned}$$

de manera que $d Em$ se puede escribir como sigue

$$\begin{aligned}
(5.2) \quad d Em &= Vl \cdot Df \cdot d Fr = \\
&= (8 \pi Vl Fr^2 d Fr / Rm^3) \\
&\quad (Pl Fr / (e^{Pl Fr / Bl Tm} - 1)) = \\
&= (8 \pi Vl Fr^2 d Fr / Rm^3) \\
&\quad [\sum_0^{\infty} x Fc (1 - e^{-Pl Fr / Bl Tm}) \\
&\quad e^{-x Pl Fr / Bl Tm} \cdot x Pl Fr] / \\
&\quad / [\sum_0^{\infty} Fc (1 - e^{-Pl Fr / Bl Tm}) e^{-x Pl Fr / Bl Tm} = \\
&= d Fc (\sum_0^{\infty} Fc_x Ef_x) / (\sum_0^{\infty} Fc_x) = d Fc \cdot Ef
\end{aligned}$$

5.3 De lo afirmado en 5.0, 5.1, 5.2, podemos concluir que

π	= 3,14
e	= 2,72
Bl	= $1,38 \cdot 10^{-23} \text{ mt}^2 \text{ sc}^{-2} \text{ Kg Kl}^{-2}$
Rm	= $3,00 \cdot 10^8 \text{ mt} \text{ sc}^{-1}$
St	= $7,57 \cdot 10^{-16} \text{ mt}^{-1} \text{ sc}^{-2} \text{ Kg Kl}^{-4}$
Pl^*	= $1,21 \cdot 10^{-34} \text{ mt}^2 \text{ sc}^{-1} \text{ Kg}$
Pl^{**}	= $3,55 \cdot 10^{-34} \text{ mt}^2 \text{ sc}^{-1} \text{ Kg}$
Wf^*	= $5,88 \cdot 10^{10} \text{ sc}^{-1} \text{ Kl}^{-1}$
Wf	= $7,95 \cdot 10^{-27} \text{ mt}^{-1} \text{ sc}^{-1} \text{ Kg Kl}^{-3}$
Wl^*	= $2,99 \cdot 10^{-3} \text{ mt} \text{ Kl}$
Wl	= $1,72 \cdot 10^{-13} \text{ mt}^{-2} \text{ sc}^{-2} \text{ Kg Kl}^{-5}$
Ri	= 1,87
Fn	= 6,50
Af	= 2,82
$Pl^1 Af$	= $1,68 \cdot 10$
Al	= $4,97 \cdot 10^2$
$pl^1 Al$	= 1,43.
Pl	= $6,62 \cdot 10^{-34} \text{ mt}^2 \text{ sc}^{-1} \text{ Kg}$

“la energía monocromática $d Em$, relativa al intervalo espectral $Fr \vdash Fr + d Fr$, contenida en el volumen Vl de una cavidad Cv allí en equilibrio térmico a la temperatura absoluta Tm puede expresarse según las fórmulas (5.2), y las mismas sugieren la siguiente “interpretación” o “modelo”

“la energía radiante monocromática $d Em$, relativa al intervalo espectral $Fr \vdash Fr + d Fr$, contenida en el volumen Vl de una cavidad Cv y allí en equilibrio térmico a la temperatura absoluta Tm , es igual al producto del número $d Fc$ (que es igual a $8 \pi Vl Fr^2 d Fr / Rm^3$) de las “frecuencias características o propias” contenidas en el volumen Vl y relativas al intervalo espectral

$Fr \vdash Fr + d Fr$, por la energía media Ef (que es igual a $Pl Fr / (e^{Pl Fr / Bl Tm} - 1)$) de cada una de las frecuencias propias de Vl en número de Fc , agrupadas en clases (x) cada una de las cuales contiene un número de frecuencias propias dado por Fc_x (que es igual a $Fc (1 - e^{-Pl Fr / Bl Tm}) e^{-x Pl Fr / Bl Tm}$) caracterizadas por el hecho de poseer, cada una de estas Fc_x , la energía Ef_x (que es igual a $x \cdot Pl Fr$)”

y esta proposición, aquí deducida como interpretación de la ley de Planck, es precisamente aquella que la teoría cuantística asume como postulado.

Cp 6 Notas.

6.0 Creemos conveniente consignar en una tabla los valores numéricos, con la mantisa de sus logaritmos decimales, de las constantes, dimensionales o no, encontradas en el estudio que precede, y las primeras expresadas en el sistema “práctico” mt (metro) sc (segundo) Kg (kilogramo) Kl (Kelvin)

Los valores están aproximados, todos, a la tercera cifra significativa

$mn \lg \pi$	= 0,497
$mn \lg e$	= 0,434
$mn \lg Bl$	= 0,140
$mn \lg Rm$	= 0,477
$mn \lg St$	= 0,879
$mn \lg Pl^*$	= 0,083
$mn \lg Pl^{**}$	= 0,550
$mn \lg Wf^*$	= 0,769
$mn \lg Wf$	= 0,900
$mn \lg Wl^*$	= 0,462
$mn \lg Wl$	= 0,235
$mn \lg Ri$	= 0,271
$mn \lg Fn$	= 0,813
$mn \lg Af$	= 0,450
$mn \lg Pl^1 Af$	= 0,225
$mn \lg Al$	= 0,696
$mn \lg Pl^1 Al$	= 0,156
$mn \lg Pl$	= 0,821

6.1 Creemos conveniente poner en evidencia que las consideraciones desarrolladas en 4.0, ..., 4.5 así como las conclusiones a que llegamos, y precisamente que la función pl debe ser tal que

$$\left\{ \begin{array}{l} pl(1,51 Ri) = 8,67 Ri \\ pl^1(1,51 Ri) = 16,8 \end{array} \right\}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} pl(2,66 Ri) = 76,3 Ri \\ pl^1(2,66 Ri) = 143 \end{array} \right\}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} Ri = In^{1/3} \\ In = S_0 \infty x^3 dx / pl x \end{array} \right\}$$

podemos considerarlas como innecesarias en

$$Rm = \text{constante óptima de Roemer} = 3,00 \cdot 10^8 \text{ } mt \text{ } sc^{-1}$$

$$Bl = \text{constante térmica de Boltzmann} = 1,38 \cdot 10^{-23} \text{ } mt^2 \text{ } sc^{-1} \text{ } Kg \text{ } Kt^{-1}$$

$$Pl = \text{constante dinámica de Planck} = 6,62 \cdot 10^{-34} \text{ } mt^2 \text{ } sc^{-1} \text{ } Kg$$

y determinada por la ley de Lummer-Planck (6.20).

$$6.20 \quad Df = 8 \pi Pl Fr^3 / Rm^3 (e^{Pl Fr / Bl Tm} - 1)$$

$$6.21 \quad Df = 8 \pi Bl Fr^2 Tm / Rm^3$$

$$6.22 \quad Df = 8 \pi Bl Fr^3 / Rm^3 e^{Pl Fr / Bl Tm}$$

$$6.23 \quad Fr^* = Af^* Bl Tm / Pl$$

$$6.24 \quad Df^* = 8 \pi Af^* (3 - Af^*) Bl^3 Tm^3 / Rm^3 Pl^2$$

$$6.25 \quad 0 = e^{Af^*} (3 - Af^*) - 3, \Rightarrow, Af^* = 2,82$$

$$6.26 \quad Dp = 8 \pi^5 Bl^4 Tm^4 / 15 Rm^3 Pl^3$$

lo que concierne a la búsqueda de la misma $pl x$ como ha sido desarrollada en 4.6, ..., 4.8, pero se demostraron utilísimas para "comprobar" con un mínimo de pruebas, que la solución aparecida a través de las consideraciones desarrolladas en 4.6, ..., 4.8 era precisamente la que estábamos buscando.

6.2 Creemos conveniente reunir en un solo $Pr.$ las proposiciones que paso a paso encontramos durante el estudio hecho, expresadas ahora, todas, en términos de la termóptica (Rm, Bl, Pl) o sea la termóptica *caracterizada* por las constantes

$$6.20^1 \quad Dl = 8 \pi Rm Pl / Ln^5 (e^{Rm Pl / Bl Tm Ln} - 1)$$

$$6.21^1 \quad Dl = 8 \pi Bl Tm / Ln^4$$

$$6.22^1 \quad Dl = 8 \pi Rm Pl / Ln^5 e^{Rm Pl / Bl Tm Ln}$$

$$6.23^1 \quad Ln^* = Rm Pl / Al^* Bl Tm$$

$$6.24^1 \quad Dl^* = 8 \pi Al^{*4} (5 - Al^*) Bl^5 Tm^5 / Rm^4 Pl^4$$

$$6.25^1 \quad 0 = e^{Al^*} (5 - Al^*) - 5, \Rightarrow, Al^* = 4,97$$