LAS FORMULAS DE EINSTEIN SIN RELATIVISMO Y LA ONDA DE BROGLIE

MEMORIA PRESENTADA A LA ACADEMIA COLOMBIANA DE CIENCIAS EN MARZO DE 1953.

POR **DARIO ROZO M.**

Las fórmulas de Einstein pueden obtenerse prescindiendo del concepto de *la relatividad de la simultaneidad* que constituye el fundamento de la teoría einsteniana.

La relatividad de la simultaneidad implica la inconsistencia de la extensión y del tiempo causada por la velocidad de que están dotados los objetos. La posibilidad de esa inconstancia es una idea difícil de admitir como idea lógica, porque riñe abiertamente con el concepto que se tiene de la naturaleza de las cosas; y en esto estriba principalmente la dificultad que muchos experimentan para entender las teorías de Einstein.

Pero fundándonos solamente en la variabilidad de la masa producida por la velocidad de que esté dotada, pueden hallarse las mismas fórmulas de Einstein, y determinándolas así se prescinde de lo que se entiende por relativismo conforme a lo anotado en el párrafo anterior.

El problema puede tratarse así:

Si la masa m dotada de velocidad v se incrementa en la cantidad μ, se debe tener

$$m\,v = (m + \mu)\,v_1$$

pero se puede poner a μ bajo esta forma $\mu = m/\beta - m$; por consiguiente $m + \mu = m/\beta$ de donde resulta $m\,v = m\,v_1/\beta$ o sea $v = v_1/\beta$

Como $v = \dfrac{dl}{dt}$, $v_1 = \dfrac{dl_1}{dv_1}$ se obtiene $\dfrac{v}{v_1} = \dfrac{dl}{dt}\,\dfrac{dt_1}{dl_1} = \dfrac{1}{\beta}$

Esta fórmula para lapsos iguales, o sea para $dt = dt_1$ dará $dl = \dfrac{dl_1}{\beta}$ cuya integral es $l = \dfrac{l_1 + k}{\beta}$ con $k = -v_1 t_1$

Ahora bien, como en la mecánica clásica se admite que no hay aumento de masa, se debe tener $\dfrac{dl}{dt} = \dfrac{dl_1}{dt_1}$ y sustituyendo el valor hallado para dl se encuentra

$$\frac{dl_1}{\beta dt} = \frac{dl_1}{dt_1} \quad \therefore \quad \beta dt = dt^1 \quad \therefore \quad dt = \frac{dt_1}{\beta}$$

cuya integral es $t = \dfrac{t_1 + n}{\beta}$, con $n = -\dfrac{v_1\,l_1}{c^2}$

Todo estriba pues en demostrar que para una masa dotada de velocidad v debe presentarse el incremento de masa $\mu = m\left(\dfrac{1}{\beta} - 1\right)$

y que la cantidad que hemos designado con beta sea

$$\beta = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}.$$

La demostración es la siguiente:

El estudio matemático del mundo físico debe basarse en el concepto de *velocidad,* porque la concomitancia entre espacio y tiempo es necesaria en la naturaleza y por consiguiente debe ser ineludible en los procesos matemáticos. Esto que ya está admitido en la física moderna preocupaba a los filósofos grigeos cuatro centurias antes de Jesucristo, como lo demuestran los célebres problemas de Zenón de Elea, quien con ellos no pretendió, como se afirma, negar el movimiento, sino hacer ver que en los problemas en que éste interviene no pueden considerarse como independiente el espacio y el tiempo. La tortuga nunca alcanzará a Aquiles si se van considerando separadamente los espacios y los tiempos; pero el problema se resuelve si se hacen intervenir las respectivas velocidades de Aquiles y de la tortuga.

Así, pues, en determinados problemas se ha de emplear siempre la velocidad como elemento de cálculo, cuya expresión en función de espacio y tiempo infinitesimales es $v = \dfrac{ds}{dt}$. Y para demostrar lo del incremento de masa debe considerarse una propiedad muy importante de la segunda potencia de la velocidad, es a saber: el potencial p del campo newtoniano, en el cual figura el factor k que es el coeficiente de gravitación, tiene esta forma:

$$p = k\,\frac{m}{r}$$

y como las dimensiones mecánicas de k son $M^{-1}L^3T^{-2}$, resulta que la dimensión del potencial es

$$[p] = L^2T^{-2}$$

lo que da una *velocidad al cuadrado:* v^2

Esto nos permite admitir que en ausencia de masas el espacio puede considerarse como un campo de potencial uniforme de la forma v^2.

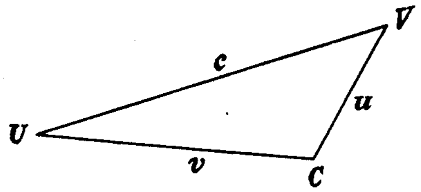
Esta clase de velocidades al cuadrado sin factor masa será denominada *portopotencial* o *protoenergía,* según los casos.

Bajo estos conceptos el espacio es algo activo capaz de producir velocidades y concuerda con lo que en física moderna se llama *espacio-tiempo.*

Sea c^2 ese protopotencial que caracteriza al espacio-tiempo; c será la máxima velocidad posible; pero la experiencia muestra que hay muchas categorías de velocidades: sea v una de ellas.

También enseña la práctica que las velocidades se componen vectorialmente, y si v procede de c habrá necesariamente otra velocidad u para que v pueda ser menor que c. En consecuencia c, v, y u formarán un triángulo como el de la figura adjunta de la cual se obtiene

$$v^2 = c^2 + u^2 - 2\, c\, u \cos V$$



Esta ecuación representa un caso particular del fenómeno que se estudia, ecuación que se constituyó mediante una función arbitraria u que debe guardar alguna relación con el ángulo V; eliminando esta función arbitraria por medio de la derivada se obtendrá la ecuación general que corresponde al fenómeno.

Procediendo así, se tiene:

$$\frac{\partial f}{\partial u} = o = 2u - c \operatorname{Cos} V$$

por tanto $u = c \operatorname{Cos} V$ o sea $\operatorname{Cos} V = \frac{u}{c}$ y sustituyendo resulta $v^2 = c^2 - u^2$ igualdad que está expresada en velocidades al cuadrado.

Esta fórmula enseña que para que sea posible una velocidad v es necesaria una protoenergía u^2. En consecuencia para que un cuerpo se mueva es necesaria la presencia de la protoenergía u^2 diferente de v^2. Cuando u^2 es cero, v^2 se confunde con c^2 o sea que v^2 no es cinética: la traslación se anula.

La mecánica enseña que un trabajo o energía W producido por una masa m tiene esta forma

$$W = \frac{1}{2}\, m\, v^2$$

Si se escribiera lo anterior teniendo en cuenta lo establecido sería

$$\frac{1}{2}\, m\, v^2 = \frac{1}{2}\, m\, c^2 - \frac{1}{2}\, m\, u^2$$

y se tendría en el primer miembro una expresión análoga a la de W, pero no equivalente, porque W procede de una integración en donde un límite corresponde a $v =$ cero. En la segunda igualdad hay indecisión en el comportamiento del segundo miembro cuando $v^2 = 0$, pues u^2 puede ser cero o puede tomar el valor c^2, según las circunstancias. Es pues neecsario estudiar el comportamiento del segundo miembro.

Para esto es necesario acudir al caso en que v es constante que es precisamente el que corresponde a la *Relatividad Restringida* y encontrar la expresión de la cantidad de movimiento.

Para hallar mv tenemos que proceder sobre lo que se ha establecido en este estudio y que es la suma de los cuadrados de las velocidades, o sea sobre

$$\frac{1}{2}\, m\, v^2 = \frac{1}{2}\, m\, c^2 - \frac{1}{2}\, m\, u^2$$

Derivando esta extresión pero teniendo muy presente que hay dependencia entre el espacio y el tiempo, se obtiene:

$$m\, v \frac{\partial v}{\partial l} \frac{\partial l}{\partial t} = m\, c \frac{\partial c}{\partial s} \frac{\partial s}{\partial t} - m\, u \frac{\partial u}{\partial \sigma} \frac{\partial \sigma}{\partial t}$$

o sea $$m\, v^2 \frac{\partial v}{\partial l} = m\, c^2 \frac{\partial c}{\partial s} - m\, u^2 \frac{\partial u}{\partial \sigma}$$

por consiguiente $$\frac{\partial v}{\partial l} = \frac{\partial c}{\partial s} = \frac{\partial u}{\partial \sigma}$$

Ahora derivando con relación a los espacios

$$m\, v \frac{\partial v}{\partial l} = m\, c \frac{\partial c}{\partial s} - m\, u \frac{\partial u}{\partial \sigma}$$

$$\therefore\quad m\, v = m\, c - m\, u$$

Cuando v es constante no hay incremento de velocidad y como necesariamente $u < c$ se tendrá que escribir $m_0\, c - m\, u = 0 \quad \therefore \quad m = m_0 \frac{c}{u}$

Pero se tenía $v^2 = c^2 - u^2 \quad \therefore \quad u^2 = c^2 - v^2$

$$\therefore\quad \frac{u}{c} = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \quad \therefore \quad m = \frac{m_0}{\beta}$$

Como $\beta < 1, m > m_0$ Hagamos $m = m_0 + \mu$

$$\therefore\quad \frac{m_0}{\beta} = m_0 + \mu \quad \therefore \quad \mu = m_0 \left(\frac{1}{\beta} - 1\right)$$

Q. E. D.

Queda pues demostrado que

$$l = \frac{l_1 - v_1 t_1}{\sqrt{1 - \frac{c^2}{v^2}}} \qquad t = \frac{t_1 - \frac{v_1 l_1}{c^2}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \qquad m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{c^2}{v^2}}}$$

fórmulas éstas que son las fórmulas cardinales de Einsetin.

Como corolario de la demostración anterior resulta que siendo u función de un coseno debe tener carácter ondulatorio, y por consiguiente para que se produzca una traslación de velocidad v es necesaria una onda acompañante de protoeenrgía u^2.

Así pues un cuerpo de masa m que se mueve con velocidad v, irá acompañado de una onda y por tanto la onda tendrá velocidad de grupo v y velocidad de fase u.

Salta a la vista que esta onda es la misma que fue introducida hipotéticamente por Broglie y para la cual Schrödinger dio la expresión matemática bajo esta forma

$$\nabla^2 s = - \frac{8\, \pi^2\, m\, (E\text{-}V)}{n^2\, h^2}\, s$$

En la cual

$m =$ *masa del corpúsculo*

$h =$ constante de Planck; $[h] = ML^2\, T^{-1}$, (acción)

$s =$ función de onda

$n =$ número entero

$(E\text{-}V) = E_{\text{cin}}$; $E = E_{\text{Top}}$; $V = E_{\text{pot}}$

En efecto, para nuestro caso de la onda u se tiene

$$\nabla^2 s = \frac{1}{u^2} \frac{\partial^2 s}{\partial t^2}$$

La solución geenral de esta ecuación es:

$$s = X(x)\, T(t)$$

con las funciones X y T de la forma siguiente:

$$X = \frac{cos}{sen}\, px, \qquad T = \frac{cos}{sen}\, upt$$

con p arbitrario.

Como ejemplo fácil tomaremos

$$s = 2A \cos kx \cos kut$$

Si en el lapso t hay n períodos de Planck se debe tener $k = \frac{2\pi}{n\lambda}$ con $\lambda =$ *longitud de onda.*

De la igualdad s se obtiene

$$\frac{\partial^2 s}{\partial t^2} = -2A\, k^2 u^2 \cos kx \cos kut$$

$$\therefore \quad \frac{\partial^2 s}{\partial t^2} = -\frac{4\pi^2 u^2}{n^2 \lambda^2}\, s \quad \therefore \quad \nabla^2 s = -\frac{4\pi^2}{n^2\lambda^2}\, s$$

Se tiene demostrado que

$$\lambda = \frac{h}{mc} \quad \therefore \quad \frac{1}{\lambda^2} = \frac{m^2 v^2}{h^2} = \frac{m}{h^2}\, m\, v^2,$$

pero $\frac{1}{2}\, mv^2 = E_{cin} = E\text{-}V \quad \therefore \quad mv^2 = 2\,(E\text{-}V)$

y sustituyendo: $\frac{1}{\lambda^2} = \frac{m}{h^2}\, 2\,(E\text{-}V)$

y por consiguiente $\nabla^2 s = -\frac{8\pi^2 m}{n^2 h^2}\,(E\text{-}V)\, s$

que es la fórmula de Schrödinger.

De esto se debe deducir que para que cualquier cuerpo de masa m adquiera movimiento se necesita la onda de Broglie. Esta onda no es pues solamente un artificio matemático, corresponde a una realidad.

Del triángulo de velocidades se obtuvo el valor de v^2 que sirvió para el estudio precedente. De manera análoga se procede sobre el valor de u^2 y se obtendrá que entonces v^2 es de carácter ondulatorio, lo que puede interpretarse diciendo que u y v son permutables en cuanto al carácter ondulatorio y al de traslación. Del valor de c^2 se obtiene $u^2 = v^2$ y ambos con carácter ondulatorio, lo cual da fundamento a una teoría sobre la formación del átomo que será motivo de otra comunicación a la Academia.

OBSERVACIONES IMPORTANTES:

1ª) El estudio anterior demuestra que la masa en reposo m_0 es invariable y concuerda con la masa de la mecánica newtoniana. 2ª) Lo que se ha llamado *incremento de masa* es más bien un incremento del coeficiente de inercia causado por la onda acompañante y se debe a la idiosincracia del espacio y no al comportamiento de la masa propiamente dicha. 3ª) Como algunos autores dan a la masa de la mecánica newtoniana el nombre de coeficiente de inercia, conviene para este estudio hacer distinción entre la masa que se comporta como invariable y el coeficiente de inercia cuyo efecto puede traducirse en un aumento de masa.

Bogotá, marzo de 1953.