

Figura 4

cualquiera que sea n. Y esto se asegura si y solo si

$$\max_n \left(\frac{1+i}{1+r} \right)^n < \frac{r}{i} \left[1 - S_0 \frac{a-b}{R_1} \right] \quad (09a)$$

en donde el lado izquierdo vale 1 (para n = 0). O sea que necesitamos que sea

$$\frac{i}{r} < 1 - S_0 \frac{a-b}{R_1} = 1 - S_0 \frac{r-i}{R_1} \iff S_0/R_1 < 1/r \iff R_1 > S_0 r \quad (10)$$

Este es el caso del rentista que desde el primer período del proceso retira del fondo más dinero R_1 que lo que produce el fondo ($r S_0$).

Si el rentista ajusta su primer retiro R_1 a la rentabilidad efectiva $(r-i)S_0$ del fondo, $R_1 = S_0 (r-i) = S_0 (a-b)$, se deduce de inmediato, de la ecuación (04), que

$$S_n = S_0 b^n$$

es decir, que el fondo si crece en valores corrientes y nominales de modo proporcional a la inflación, pero que en moneda constante, deflactada, se mantiene constante, como es fácil de darse cuenta también por consideraciones económicas: $S_{n+1}/S_n = b = (1+i)$, o bien $S_n/b^n + S_0 = \text{constante}$.

Si, en cambio, se ajusta a que el primer retiro R_1 y el saldo inicial S_0 estén en la relación $R_1 = S_0 r$, la inecuación (08-a) no se cumple, de modo que el fondo S_n no puede crecer indefinidamente y, en algún momento, también entra en mengua irreversible.

Se tiene pues un intervalo $H = (S_0 (r-i), S_0 r)$ tal que si R_1 está por fuera de H el fondo crece monotónicamente desde el principio y de mane-

ra indefinida, o bien merma monotónicamente desde el instante inicial hasta que se agota. En cambio, si $R_1 \in H$, el fondo S_n crece en sus primeras épocas, luego llega a un máximo y por último va descendiendo hasta agotarse. Es decir, que si $R_1 \in H$ el rentista termina por arruinarse por efecto de sus propios consumos de capital R_n combinados con la inflación, aún cuando esta sea menor que la rentabilidad ($i < r, b < a$) como lo estamos admitiendo hasta aquí.

En el caso en que R_1 sea $S_0 (r-i) < R_1 < S_0 r$ el fondo llega al máximo cuando n adopte el primer valor $n = m$ tal que

$$\Delta S_n \leq 0$$

que es aquel valor m que hace (ver ecuación 05):

$$S_0 a^m r \leq R_1 \frac{a^m r - b^m i}{a-b}$$

y no antes ni después. O sea que

$$S_0 (a-b)/R_1 \leq 1 - (b/a)^m (i/r) \quad (11)$$

mientras que

$$\Delta S_{m-1} > 0 \quad \text{y} \quad \Delta S_{m+1} < 0$$

Tomando logaritmos después de modificar ligeramente la ecuación (11), podemos calcular a m:

$$(b/a)^m = (r/i) \left[1 - S_0 (a-b)/R_1 \right]$$

$$m \cdot \log_{10}(b/a) = \log_{10} \left\{ (r/i) \left[1 - S_0 (a-b)/R_1 \right] \right\}$$

$$m = \frac{\log_{10} \left\{ (r/i) \left[1 - S_0 (a-b)/R_1 \right] \right\}}{\log_{10}(b/a)}$$

Es fácil demostrar que este valor así indicado existe y es positivo debido a que:

- (1) El logaritmo del numerador existe y es real porque el corchete es positivo, ya que $R_1 > S_0 (r-i)$.
- (2) El logaritmo del numerador es negativo porque el mismo corchete es menor que 1, ya que $R_1 < S_0 r$.
- (3) El logaritmo del denominador existe, es real y negativo porque b/a es positivo y menor que 1. Dando a n el valor $n = m$ en la ecuación

(04), se obtiene el valor máximo S_m que alcanza el fondo en ese período m -ésimo.

Y el fondo se agota en el momento $n = n^*$ cuando $S_{n^*} \leq 0$ pero $S_{n^*-1} \geq 0$.

Según la ecuación (04) esto ocurre cuando por primera vez suceda que

$$S_0 a^{n^*} \leq R_1 \frac{a^{n^*} - b^{n^*}}{a - b}$$

o sea que

$$S_0 (a-b)/R_1 \leq 1 - (b/a)^{n^*}$$

$$(b/a)^{n^*} \leq 1 - S_0 (a-b)/R_1$$

$$n^* = \frac{\log_{10} [1 - S_0(a-b)/R_1]}{\log_{10}(b/a)} \quad (13)$$

Fácilmente se demuestra que tanto el logaritmo del numerador como el del denominador existen, son reales y negativos, y por tanto n^* es real y positivo.

6. El caso discreto con rentabilidad igual a la inflación. Es aquel en que $r = i = c$, o sea que $a = b = h$. En estas condiciones, la ecuación en diferencias finitas (03) adopta la forma

$$S_{n+1} = S_n h - R_1 h^n$$

Escribiéndola reiteradamente para $n = 0, n = 1, n = 2, \text{etc.}$ se tiene

$$S_1 = S_0 h - R_1$$

$$S_2 = S_1 h - R_1 h = (S_0 h - R_1) h - R_1 h = S_0 h^2 - 2R_1 h$$

$$S_3 = S_2 h - R_1 h^2 = S_0 h^3 - 3R_1 h$$

$$S_4 = S_3 h - R_1 h^3 = S_0 h^4 - 4R_1 h^3$$

y aplicando el principio de inducción completa (como puede hacerlo fácilmente el lector que hasta aquí nos haya seguido), se obtiene

$$S_n = S_0 h^n - n R_1 h^{n-1} \quad (n = 0, 1, 2, \dots) \quad (14)$$

y además

$$\begin{aligned} \Delta S_n &= S_{n+1} - S_n = S_0 h^{n+1} - (n+1) R_1 h^n \\ -S_0 h^n + n R_1 h^{n-1} &= S_0 h^n c - n R_1 h^{n-1} c - R_1 h^n = \\ &= S_0 h^n c - R_1 h^{n-1} (nc+h). \\ &= h^{n-1} [S_0 hc - R_1 (nc+h)] \end{aligned} \quad (15)$$

El capital crece mientras que sea $\Delta S_n > 0$, es decir, mientras sea n tal que

$$S_0 hc > R_1 (nc + h) \quad (16)$$

o sea mientras que n sea

$$n < \frac{S_0 c - R_1}{R_1 c} \quad h = n_m$$

lo cual ocurre en los primeros valores futuros de n a condición, claro está, de que $S_0 c > R_1$ (es decir con tal de que el rentista tenga la disciplina de no gastar más de lo que le rinde el fondo, desde el primer año en adelante). En el momento $n = n_m$, siendo

$$n_m = (S_0 c - R_1) h / R_1 c$$

el capital alcanza su máximo S_m y después de ese instante comienza a descender ($\Delta S_n < 0$ para $n > n^*$) hasta que se anule. Esto sucederá cuando $S_n = 0$, o sea cuando $S_n = 0$ en $n = n^*$, vale decir en el momento n^* cuando ocurra que $S_0 h^{n^*} = R_1 h^{n^*-1}$

$$S_0 h = n^* R_1$$

$$n^* = S_0 h / R_1 \quad \text{que es } n^* = S_0 h / R_1 > 1 >$$

después de $n = 1$.

En esta situación, con $r = i = c$, o sea con $a = b = h$, sólo podría garantizarse el crecimiento indefinido del fondo si el rentista no hiciera ningún retiro de dinero nunca ($R_1 = 0$ y $R_n = 0$ para todo n), como se comprueba con la inecuación (16).

7. El caso discreto con hiperinflación. Es cuando la tasa de inflación es mayor que la tasa de rentabilidad: $i > r$, o sea que $b > a$ y $i/r < 1$, $b/a > 1$.

La ecuación en diferencias finitas es la misma ecuación (03) y su solución es la misma función (o, si se quiere, la misma sucesión) que marcamos (04). Pero en este caso es más cómodo presentarla en la forma

$$S_n = S_0 a^n - R_1 \frac{b^n - a^n}{b-a} \tag{04b}$$

para que el quebrado allí indicado tenga numerador y denominador ambos positivos. Se deduce sin ninguna dificultad que en este caso tenemos

$$\Delta S_n = S_0 a^n r - R_1 \frac{b^n i - a^n r}{b-a} \tag{17}$$

Así que el fondo crecería en aquellos momentos (o valores de n) cuando y mientras que

$$S_0(b-a)/R_1 > (b/a)^n (i/r) - 1$$

lo cual sólo puede ocurrir en los primeros y más bajos valores de n ya que la sucesión $(b/a)^n (i/r) - 1$ es creciente indefinidamente con n , por ser $b/a > 1$ y $(b/a)^n$ ser creciente con n de manera indefinida. El fondo pronto alcanza su máximo, cuando $n = m$ y sea $\Delta S_m \geq 0$ (pero $\Delta S_{m-1} > 0$ y $\Delta S_{m+1} < 0$). Esto ocurre cuando

$$S_0 a^m r = R_1 \frac{b^m i - a^m r}{b-a}$$

o sea cuando

$$S_0(b-a)/R_1 = (b/a)^m (i/r) - 1$$

es decir cuando

$$(b/a)^m (i/r) = S_0(b-a)/R_1 + 1$$

y

$$m = \frac{\log_{10} [S_0(b-a)/R_1 + 1]}{\log (b/a)} \tag{18}$$

que existe, es real y positiva cualesquiera que sean los valores de S_0 , de R_1 y de su relación (R_1/S_0). De ese momento en adelante (mientras se tenga que $n > m$), el fondo empieza a mermar, como es fácil comprobarlo con la ecuación (17) y la inecuación $n > m$, siendo m dado por la ecuación (18).

Se anula el fondo en el momento cuando $n = n^*$ y $S_{n^*} = 0$. Esto es, cuando sea

$$S_0 a^{n^*} = R_1 \frac{b^{n^*} - a^{n^*}}{b-a} \tag{19}$$

es decir cuando

$$n^* = \frac{\log_{10} [S_0(b-a)/R_1 + 1]}{\log_{10}(b/a)} \tag{20}$$

y esta expresión existe, es real y positiva para cualquier par de valores de S_0 y R_1 , desde que estos sean finitos y no nulos. Es decir, en estas condiciones de inflación arrasadora ($i > r$), que en economía se llama también "hiperinflación", el rentista termina forzosamente por arruinarse, más tarde o más temprano, no importa qué tan grande sea su capital inicial S_0 ni qué tan pequeños sean sus retiros R_1, R_2, \dots, R_n de fondos periódicos.

8. El caso continuo optimista. Esta es una situación en que la administración del fondo logra que los rendimientos que éste genera le sean pagados con mucha frecuencia, digamos diariamente, aunque esto sea en cantidades muy pequeñas cada día. Desde el punto de vista analítico, esto significa tratar el tiempo como una variable continua, las funciones $S(t)$ de stock de capital y $R(t)$ de retiro de fondos como funciones continuas y derivables (que desde Weierstrass sabemos que no es lo mismo) y tratar el proceso económico como un proceso continuo en el tiempo. La capitalización es continua y no a intervalos finitos, lo mismo que el avance de la inflación y el gasto de fondos de la reserva.

Estamos suponiendo que el índice de inflación $I(t)$ evoluciona también de manera continua y que crece según una ley¹.

$$dI(t)/dt = \beta I(t)$$

1. En Estadística Económica este índice es una función del tiempo histórico, definida positiva, y usualmente creciente, en países con inflación. En Colombia podemos hacerlo proporcional al valor de la canasta familiar, o al índice de precios del comercio al por mayor, o a otros indicadores más refinados.

en donde admitimos que β es constante con el tiempo, lo cual aproxima bastante bien la realidad de algunas situaciones. De aquí resulta

$$I(t) = I(0) e^{\beta t}$$

donde e es la base de los logaritmos naturales ($e = 2.71828182846 \dots$), y ν es la tasa de crecimiento instantáneo del índice $I(t)$. Es usual (pero no necesario) definir $I(0) = 100.00$. Para mantener un ingreso deflactado en moneda corriente $R(t)$ por unidad de tiempo, que sea permanentemente constante, en moneda dura (o en pesos constantes de un mismo mes de cierto año convenido), el rentista debe hacer que $R(t)$ sea proporcional al índice de inflación $I(t)$, vale decir, que en los distintos momentos del tiempo t , se tenga:

$$R(t) \propto I(t)$$

lo que corresponde a

$$R(t) = R_0 e^{\beta t}$$

como es evidente para matemáticos y economistas.

En esta expresión R_0 es la cuota de retiro de fondos por día (o por otra unidad de tiempo muy corta) con que se inicia el proceso: $R_0 = R(t=0)$.

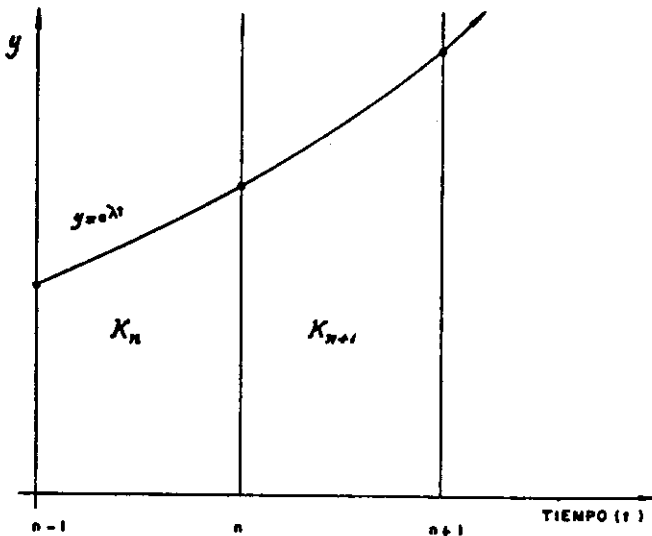


Figura 5.

Si la tasa instantánea de rendimiento del dinero del fondo, por día (o por otra unidad de tiempo muy corta), es α , la cuantía de ese rendimiento es $S \cdot \alpha$ (por día). El balance del fondo se liquida ins-

tante tras instante (digamos día por día, en la práctica) y se expresa en la ecuación diferencial

$$dS(t)/dt = \alpha \cdot S(t) - R_0 e^{\beta t} \tag{21}$$

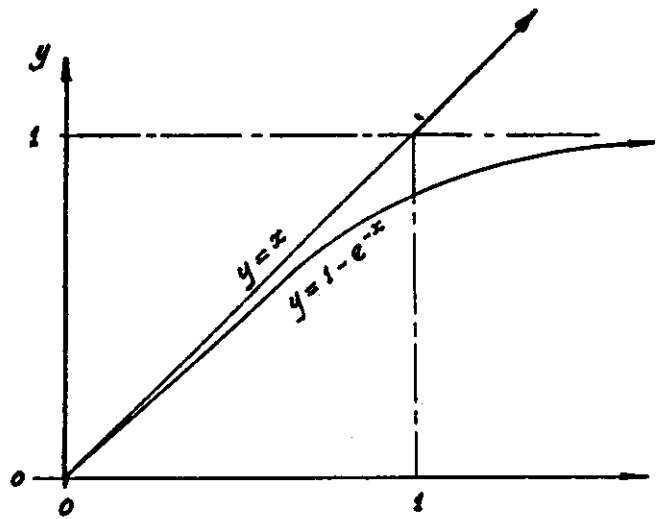


Figura 6

cuyo significado y cuya deducción son casi obvios. Podemos también escribir esta ecuación en la forma más conocida y típica.

$$dS/dt - \alpha S = -R_0 e^{\beta t} \tag{21a}$$

de una ecuación diferencial ordinaria, lineal, de primer orden y no-homogénea.

En cualquier texto de Ecuaciones Diferenciales Ordinarias (como el de la referencia bibliográfica) se encuentra que la solución general de la ecuación anterior es

$$S(t) = e^{\alpha t} \left[- \int R_0 e^{\beta t} \cdot e^{-\alpha t} \cdot dt + A \right] \\ = A e^{\alpha t} - R_0 e^{\beta t} / (\beta - \alpha) \tag{22}$$

en donde A es una constante arbitraria. En el momento inicial $t = 0$, esta solución da la relación

$$S_0 = A - R_0 / (\beta - \alpha)$$

de donde resulta

$$A = S_0 + R_0 / (\beta - \alpha)$$

y de aquí sustituimos en (22) para tener

$$S = S_0 e^{\alpha t} - R_0 (e^{\alpha t} - e^{\beta t}) / (\alpha - \beta) \tag{22a}$$

La rapidez de aumento o disminución del fondo la obtenemos derivando

$$\dot{S}(t) = dS/dt = \alpha S_0 e^{\alpha t} - R_0 (\alpha e^{\alpha t} - \beta e^{\beta t}) / (\alpha - \beta) \tag{23}$$

$$\ddot{S}(t) = \alpha^2 S_0 e^{\alpha t} - R_0 (\alpha^2 e^{\alpha t} - \beta^2 e^{\beta t}) / (\alpha - \beta) \tag{24}$$

Sustituyendo las ecuaciones (22) y (23) en la ecuación (21) se comprueba fácilmente la validez de la solución encontrada.

Ya se sabe que el fondo crece cuando sea $\dot{S}(t) > 0$; alcanza un máximo en donde puede ser $\dot{S}(t) = 0$ y $\ddot{S}(t) < 0$; y se anula cuando se llegue a $S(t) = 0$.

Hemos llamado "optimista" al caso en que la tasa de rentabilidad (continua y compuesta) α es mayor que la tasa de inflación β (continua y compuesta): $\alpha > \beta$. El fondo crece cuando y en tanto que sea

$$\alpha S_0 e^{\alpha t} - \alpha R_0 e^{\alpha t} / (\alpha - \beta) + \beta R_0 e^{\beta t} / (\alpha - \beta) > 0$$

que es lo mismo que

$$\alpha S_0 > R_0 \left[\alpha - \beta e^{-(\alpha - \beta)t} \right] / (\alpha - \beta)$$

Si aspiramos a que el fondo de capital crezca en todo momento, cualquiera que sea t , necesitamos y es suficiente que

$$(\alpha - \beta) \cdot \alpha S_0 / R_0 > \max_t \left[\alpha - \beta e^{-(\alpha - \beta)t} \right] = \alpha \quad (\text{para } t = +\infty) \tag{25}$$

es decir, que hagamos

$$R_0 < (\alpha - \beta) S_0$$

Si R_0 es mayor que $(\alpha - \beta)S_0$, el fondo aún puede crecer durante un tiempo, hasta llegar a lograr un máximo cuando se tenga

$$S(t_m) = 0 \quad \text{y} \quad \ddot{S}(t_m) < 0$$

es decir, cuando sea

$$e^{(\alpha - \beta)t_m} = \frac{R_0}{(\alpha / \beta) [R_0 - S_0(\alpha - \beta)]}$$

o bien

$$t_m = \frac{\log_e \left\{ (R_0 \beta / \alpha) \div [R_0 - S_0(\alpha - \beta)] \right\}}{\alpha - \beta} \tag{26}$$

Para que este valor de t_m sea real y positivo es suficiente y necesario que

$$R_0 \beta / \alpha > R_0 - S_0(\alpha - \beta)$$

o sea que necesitamos y basta que se tenga

$$R_0 < \alpha S_0$$

aunque sea $R_0 > S_0(\alpha - \beta)$. Un cálculo algebraico sencillo, que se deja al lector, permite substituir la expresión (26) en la (24) y demostrar así que:

$$\ddot{S}(t_m) < 0.$$

De ese momento en adelante, cuando ya t es $t > t_m$, el fondo entra en declinación porque

$$S(t) < 0 \quad \text{para } t > t_m,$$

como es fácil comprobarlo usando las expresiones (23) y (26). Y se agota totalmente cuando sea $t = t^*$ tal que

$$S(t^*) = 0: 0$$

es decir, que

$$(\alpha - \beta)S_0 + R_0 e^{-(\alpha - \beta)t^*} - R_0 = 0$$

o sea que

$$t^* = - \frac{\log_e \left[1 - (\alpha - \beta)S_0 / R_0 \right]}{\alpha - \beta} \tag{27}$$

a condición, claro está, de que el corchete en el numerador sea positivo pero menor que uno:

$$0 < 1 - (\alpha - \beta)S_0/R_0 < 1$$

que quiere decir que

$$R_0 > (\alpha - \beta) S_0$$

Vale decir que el fondo de capital se arruinará, más pronto o más tarde, si el régimen de retiros ha empezado en $R_0 > (\alpha - \beta) S_0$, aun en esta situación "optimista" de que la tasa de rentabilidad α sea mayor que la de inflación β .

9. El caso continuo con rentabilidad igual a la inflación. Tenemos aquí $\alpha = \beta = \epsilon$ y la solución (22) se convierte en

$$S(t) = Ae^{\epsilon t} - R_0 t e^{\epsilon t} \quad (28)$$

lo cual se deduce aplicando la regla de L'Hôpital a la ecuación (22). Resulta que la velocidad de crecimiento es

$$S(t) = S_0 \epsilon e^{\epsilon t} - R_0 t \epsilon e^{\epsilon t} - R_0 e^{\epsilon t}$$

En la forma en que ya lo hemos hecho, deducimos que: (1) el fondo crece en los primeros tiempos posteriores a $t = 0$ si el régimen de retiro R_0 y esos primeros tiempos cumplen la desigualdad

$$t \epsilon < 1 + S_0 \epsilon / R_0 ;$$

(2) además, observando esta inecuación se deduce que este fondo (con α y β iguales y con un valor común ϵ bien determinado) no puede aumentar indefinidamente, sean cuales sean los valores (positivos y fijos) de S_0 y R_0 ; (3) alcanza su valor máximo cuando $\dot{S}(t_m) = 0$ y $\ddot{S}(t_m) < 0$, esto es, cuando $t_m = (S_0 \epsilon / R_0 - 1)$ si es que $R_0 < S_0 \epsilon$; y finalmente (4) se anula, forzosamente, cuando $S(t^*) = 0$, que es en $t^* = S_0/R_0$ (siendo $t^* > t_m$, como puede comprobarse analíticamente, si $\epsilon < 2$).

10. El caso continuo con hiperinflación. En condiciones de hiperinflación, cuando $\epsilon > \beta$, la solución a la ecuación (21) puede escribirse de manera más conveniente como

$$S(t) = \left[S_0 + R_0 / (\beta - \alpha) \right] e^{\alpha t} - R_0 e^{\beta t} / (\beta - \alpha)$$

donde $\beta - \alpha$ es positivo. La rapidez de aumento (o de merma) del fondo será

$$S(t) = \alpha \left[S_0 + R_0 / (\beta - \alpha) \right] e^{\alpha t} - \beta R_0 e^{\beta t} / (\beta - \alpha)$$

y mientras esta expresión sea positiva ($S(t) > 0$) el fondo aumentará. Ello sucede mientras se tenga

$$\alpha \left[S_0 + R_0 / (\beta - \alpha) \right] e^{\alpha t} > \beta R_0 e^{\beta t} / (\beta - \alpha)$$

o bien, simplificando esta inecuación, cuando

$$\alpha S_0 > e^{(\beta - \alpha)t}$$

o sea, mientras sea ún

$$t < \left[1 / (\beta - \alpha) \right] \log_e (\alpha S_0 / R_0)$$

admitiendo, por supuesto, que $\alpha S_0 > R_0$ pues de lo contrario ese fondo no conoce ninguna época de crecimiento, sino que cae desde el primer momento.

Se llega al máximo de las reservas nominales de capital cuando $\dot{S}(t) = 0$ y $\ddot{S}(t) < 0$, o sea cuando

$$\alpha \left[S_0 + R_0 / (\beta - \alpha) \right] e^{\alpha t} = \beta R_0 e^{\beta t} / (\beta - \alpha)$$

o sea cuando

$$t_m = \left[1 / (\beta - \alpha) \right] \log_e (\alpha S_0 / R_0) \quad (29)$$

y la ecuación (24) muestra que en ese momento se tiene $\ddot{S}(t_m) < 0$.

Finalmente, el fondo se extingue cuando $S(t^*) = 0$, es decir

$$(\beta - \alpha) S_0 + R_0 = R_0 e^{(\beta - \alpha)t^*}$$

de donde resulta que la duración del fondo es

$$t^* = \frac{\log_e \left[(\beta - \alpha) S_0 / R_0 + 1 \right]}{\beta - \alpha} \quad (30)$$

y este valor existe y es positivo para todo S_0 y todo R_0 . Es decir, si $\beta > \alpha$, el ahorrador que vive de sus ahorros comienza mente llegará a arruinarse.

11. El proceso continuo contra el discreto. Es importante examinar si entre la modalidad dis-

creta y la continua hay diferencias sustantivas en los resultados que encontramos.

Primeramente calcularemos sobre la Fig. 5 el área bajo la curva monótonicamente creciente $y = e^{\lambda t}$, para obtener

$$K_n = \int_{n-1}^n e^{\lambda t} dt = e^{\lambda n} (1 - e^{-\lambda}) / \lambda \quad (\text{con } \lambda > 0) \tag{31}$$

de donde

$$K_{n+1} = e^{\lambda(n+1)} (1 - e^{-\lambda}) / \lambda$$

$$y \quad K_{n+1} / K_n = e^{\lambda} \tag{31a}$$

De manera que si escribimos entre K_{n+1} y K_n la relación

$$K_{n+1} = K_n (1 + x)$$

en donde x sea la tasa porcentual de aumento relativo interanual, tendremos

$$e^{\lambda} = 1 + x \text{ o sea } x = e^{\lambda} - 1 \tag{32}$$

Entonces, entre los procesos continuos y discretos tendremos las identidades

$$a = 1 + r = e^{\alpha} \quad b = 1 + i = e^{\beta}$$

$$a - b = r - i = e^{\alpha} - e^{\beta}$$

refiriéndonos a las ecuaciones (03) y (21), de pronóstico "optimista".

Ya vimos, en el caso discreto que, si $(a - b) S_0 < R_0 < \alpha S_0$, el rentista acaba por arruinarse y que ello ocurre en el plazo dado por la expresión (13)

$$n^* = \frac{\log_e [1 - S_0(a-b)/R_1]}{\log (b/a)}$$

En el caso continuo, al ahorrador le sucede lo mismo, y eso le ocurre en un plazo t^* dado por la expresión

$$t^* = - \frac{\log_e [1 - S_0(\alpha - \beta)/R_0]}{\alpha - \beta} \tag{33}$$

según la ecuación (27).

Durante el primer año, el retiro total de fondos, en la forma continua, sería de acuerdo con la ecuación (31-a),

$$R_1 = R_0 e^{\alpha}$$

de modo que el plazo de supervivencia del capital, antes de que se agote, sería, en el proceso discreto, en número de períodos:

$$n^* = \frac{\log_e [1 - S_0(e^{\alpha} - e^{\beta})/R_0 e^{\alpha}]}{\log_e (e^{\beta} / e^{\alpha})}$$

$$= - \frac{\log_e [1 - S_0 [1 - e^{-(\alpha - \beta)}] / R_0]}{\alpha - \beta}$$

En la Fig. 6 se recuerda la gráfica de la función $y = 1 - e^{-x}$ con $x = 0$ y de la función $y \geq x$ con $x = 0$. En la gráfica se observa que, para todo valor de x que sea positivo, la función $y = x$ es

$$x > 1 - e^{-x}$$

y por tanto, cualesquiera que sea α y β , ($\beta < \alpha$), se tendrá

$$\alpha - \beta > 1 - e^{-(\alpha - \beta)}$$

y por lo tanto, observando los signos de los términos, deducimos que

$$-\ln \left\{ 1 - S_0 \left| 1 - e^{-(\alpha - \beta)} \right| / R_0 \right\} < -$$

$$\ln \left\{ 1 - S_0(\alpha - \beta) / R_0 \right\} \tag{*}$$

y en consecuencia

$$n^* < t^*$$

Esto significa que al ahorrador-rentista le dura más el fondo de capital (en las condiciones $\alpha > b$, $\alpha > \beta$ $S_0(a-b) = S_0(r-i) < R_0 > S_0(\alpha - \beta)$) si lo administra de manera continua, con retiros y liqui-

(*) $\ln =$ logaritmo natural

dación de rendimientos diarios (y ojalá horarios) aunque sean pequeños, que si lo hiciera anualmente o mensualmente.

APENDICE: Ejemplos numéricos

Los casos que se indican a continuación son ejemplos numéricos para algunas de las situaciones que ya hemos analizado.

Caso 1. Tomemos

$$S_0 = \$100 \text{ millones} = \$100 \text{ MM} (*)$$

$$r = 30\%/año = 0.3/año \Leftrightarrow a = 1.3$$

$$i = 20\%/año = 0.2/año < r \Leftrightarrow b = 1.2$$

$$R_1 = \$5\text{MM en el primer año}$$

Observación: Aquí se tiene $R_1 = \$5\text{MM} < S_0$
 $(r-i) = S_0 (a-b) = \$100\text{MM} \times (0.3-0.2)$.

La ecuación de recurrencia es en este caso

$$S_{n+1} = S_n (1+r) - R_{n-1} = 1.3S_n - R_1 b^{n-1}$$

$$= 1.3 S_n - \$10\text{MM} \times R_1 \times 1.2^{n-1}$$

Año (n)	Saldo al fin del año (S_n)	Retiro durante el año (R_n)
0	\$ 100.00 MM	—
1	125	\$ 5 MM
2	156.5	6
3	196.25	7.2
4	246.485	8.64
5	310.0625	10.368
6	390.6396	12.4416
7	492.9016	14.9299
8	622.8562	17.9159
9	788.2139	21.4990
10	998.8792	25.7889
⋮	⋮	⋮

En estas condiciones el fondo seguirá creciendo indefinidamente debido a que $R_1 < S_0 (r-i)$.

Caso 2. Tomemos

$$S_0 = \$100 \text{ millones} = \$100\text{MM}$$

$$r = 30\%/año = 0.3/año \Leftrightarrow a = 1.3 \text{ cada año}$$

$$i = 20\%/año = 0.2/año < r \Leftrightarrow b = 1.2 \text{ cada año}$$

$$R_1 = \$10\text{MM en el primer año}$$

* Usamos el símbolo "MM" para indicar "millones", siguiendo una práctica muy usada por los analistas financieros en EE. UU. y por los economistas del Fondo Monetario Internacional.

Observación: Aquí se tiene $R_1 = \$10 \text{ MM} = S_0 (r-i) = S_0 (a-b) = \$100 \text{ MM} \times (0.3 - 0.2)$.

La ecuación de recurrencia es en este caso

$$S_{n+1} = S_n (1+r) - R_{n-1} = S_0 b^n$$

$$= 1.3 S_n - R_1 b^{n-1} = 1.3 S_0 - \$10 \text{ MM} \times 1.2^{n-1}$$

y la evolución del fondo de ahorro está descrita por las siguientes series:

Año (n)	Saldo al fin del año (S_n)	Retiro durante el año (R_n)
0	\$ 100.00 MM	—
1	120	\$ 10.00 MM
2	144	12
3	172.8	14.4
4	207.36	17.28
5	248.832	20.736
6	298.594	24.8832
7	358.32792	29.8594
8	429.9848	35.8329
9	515.9821	42.9984
10	619.1789	51.5982
11	743.0148	61.9179
12	891.6177	74.3015
⋮	⋮	⋮

Aquí el fondo seguirá creciendo indefinidamente según la ley $S_n = S_0 b^n$ por el hecho de que $S_0 (a-b) = S_0 (r-i) = R_1$, lo cual ya se demostró.

Caso 3. Tomemos

$$S_0 = \$100 \text{ MM}$$

$$r = 30\%/año = 0.3/año \Leftrightarrow a = 1.3 \text{ cada año}$$

$$i = 20\%/año = 0.2/año \Leftrightarrow b = 1.2 \text{ cada año} < a$$

$$R_1 = \$20\text{MM en el primer año}$$

Observaciones: Aquí se tiene $a > b (r > i)$ y $S_0 (a-b) = \$10\text{MM} < R_1 = \$20\text{MM} < S_0 a = \$30 \text{ MM}$.

Numéricamente la ecuación de recurrencia queda

$$S_{n+1} = 1.3 \times S_n - R_1 \times 1.2^n = 1.3 \times S_n - 20\text{MM} \times 1.2^n$$

Año (n)	Saldo al fin del año (S_n)	Retiro durante el año (R_n)
0	\$ 100.00 MM	—
1	110	\$ 20 MM
2	119	24
3	125.9	28.8
4	129.11	34.56
5	126.371	41.472
6	114.5159	49.7664
7	89.15099	59.7197
8	44.2327	71.6636
9	-28.4939(*)	85.9963 (*)

Nota: (*). En realidad sería $S_9 = 0$, $R_9 = \$ 44.2327$ MM, por obvia razón.

En este caso el fondo arranca creciendo hasta un máximo nominal

$$S_m = S_4 = \$129.11 \text{ MM}$$

Según la fórmula (12) el fondo alcanza su máximo cuando

$$m = \frac{\ln \left\{ (r/i) \left[1 - S_0(a-b)/R_1 \right] \right\}}{\ln(b/a)} = \frac{\ln \left\{ 1.5 \left[1 - 100\text{MM} \times 0.1/20\text{MM} \right] \right\}}{\ln(1.2/1.3)} = 3.59 \text{ año}$$

$$m = 4 \text{ años}$$

y se acaba, según la fórmula (13) en el año

$$n^* = \frac{\ln \left[1 - S_0(a-b)/R_1 \right]}{\ln(b/a)} = \frac{\ln(1 - 100\text{MM} \times 0.1/20\text{MM})}{\ln(1.2/1.3)} = 8.6597 \text{ años}$$

$$= 9 \text{ años}$$

Usando la fórmula (33), el lector podrá, con su calculadora de mano comprobar que el fondo dura más si se le maneja y se le administra de manera continua, como ya lo afirmamos.

Bibliografía

- Agnew, R.F. 1968. *Ecuaciones Diferenciales*. Trad. del inglés. UTEHA, México 500 p.
- Allen, R.G.D. 1960. *Mathematical Economics*. MacMillan and Co. New York. 812 p.
- Henderson, M. & R. Quant. 1958. *Microeconomic Theory*. Mac Graw-Hill, New York, 291 p.
- Jordan, C. 1965. *Calculus of Finite Differences*. Chelsea Publishing Company. New York. 654 p.
- Samuelson, P.A. 1964. *Economics. An Introductory Analysis*. Mc Graw-Hill. New York. 838 p.