EL POSTULADO DE EUCLIDES

HERNANDO LLERAS FRANCO

En el trabajo que presento a continuación se encuentran ideas y razonamientos de varios estilos: algunas demostraciones son tomadas de tratados de geometría, cuyos autores están debidamente citados, otras son originales pero están ceñidas en absoluto a los procedimientos geométricos consagrados y suficientemente conocidos; y por último, y en especial en lo relativo a definiciones y a los valores infinitos, hay conceptos netamente personales que lindan con el campo de la Filosofía, y que constituyen mi modo de ver y de apreciar estas cuestiones.

No pretendo negar el derecho a tener puntos de vista distintos. Expongo los míos y someto con todo respeto las conclusiones que se desprenden, a la consideración de los aficionados al estudio de las matemáticas, advirtiendo que no me causará ningún disgusto el que no fueran aceptadas, siempre que sean motivo de discusiones que las pongan en claro. Al contrario, considero que estas discusiones son sumamente benéficas y contribuyen en la forma más apropiada a hacer la luz y a acercarse a la verdad.

Marzo de 1947. *Hernando Lleras Franco*

EL POSTULADO DE EUCLIDES

Euclides, genial matemático griego nacido en el año 315 A. de J. C. fue realmente el fundador de la Geometría. Estableció las bases de una serie de proposiciones encadenadas por razonamientos impecables que forman una armazón de teoremas en los cuales las demostraciones están apoyadas directamente en verdades demostradas con anterioridad. Por este procedimiento se llegó a conclusiones sorprendentes y se dio principio a otras ciencias matemáticas de carácter más analítico tales como el Algebra, la Geometría Analítica, etc. Se puede decir que la cuna de todas las matemáticas fue la Geometría Euclidiana.

Pero como en esta cadena de raciocinios era indispensable un punto de partida, hubo la necesidad de establecer definiciones fundamentales, y proposiciones tan evidentes que no requieren demostración, proposiciones que se llamaron *axiomas*.

En estas definiciones fundamentales hay diversos modos de apreciar los conceptos según el pensamiento individual de cada matemático, y lo mismo sucede con el grado de evidencia de los axiomas primeros. Una proposición que para la gran mayoría de matemáticos es axiomática, para otros es dudosa y requiere demostración, y no faltan otros que la nieguen y funden su modo de pensar en la inexactitud supuesta de una cuestión generalmente aceptada. Así vemos lucubraciones científicas, de indiscutible mérito, fundamentadas en proposiciones negativas cuyas correspondientes proposiciones afirmativas no han tenido o no han podido tener completa demostración, y que, siendo negativas o teniendo obstáculos insalvables, no exigen con el mismo rigor la obligación de ser demostradas. En este caso se encuentran el desconocimiento del Postulado de Euclides en Geometría, la negación de una velocidad mayor que la de la luz y el arrastre del éter en Física, y el concepto de espacio no infinito en metafísica. Cualquiera puede decir: no hay velocidad mayor que la de la luz, y sobre esa base fundar una hipótesis, pero no es fácil demostrar que tal o cual movimiento tiene una velocidaed mayor que la de la luz. Nuestros aparatos, por perfectos que sean, no están en capacidad de apreciar variaciones en una magnitud de 300.000 kilómetros por segundo. Valiéndose de esta dificultad se podría invertir el argumento asegurado, por ejemplo, que la velocidad de las ondas hertzianas es superior en pocos kilómetros a la de la luz, sin que nadie pueda demostrar lo contrario.

En el caso del Postulado de Euclides la principal dificultad de demostración reside en la sencillez misma de los conceptos que intervienen en él. En toda demostración se pasa mediante lógica inflexible de conceptos más o menos complicados y que pueden suscitar desconfianzas o dudas en el entendimiento a conceptos claros, sencillos, y cuya evidencia no admite duda, o ya ha tenido un proceso idéntico de demostración anterior. Así se forma una cadena de razonamientos en los cuales un teorema conduce a otro, y éste a otro, y así sucesivamente. Pero en esa cadena de rigurosa racionalidad, el punto de partida es la parte difícil, porque, siendo los conceptos sencillos en grado máximo, cuesta trabajo reducirlos a principios más simples. De ahí la necesidad de admitir axiomáticamente algunas afirmaciones que el buen sentido y la razón sana indican como verdaderas.

En el comienzo del prodigioso surgimiento de la Geometría, en época de los griegos, el Postulado de Euclides no tuvo discusión, pero posteriormente hubo ilustres hombres de ciencia que, dando por sentado que no era axioma, se empeñaron en encontrarle demostración; pero muchos en su procedimiento cayeron en un círculo vicioso o petición de principio que correspondía sencillamente a construír cerrada la cadena de raciocinios en

lugar de formarla con un punto de partida tan sólido como el desarrollo matemático que lo seguía.

Hay dos demostraciones dadas por nuestro gran sabio Garavito que son irrefutables. Una de ellas utiliza medios analíticos que no armonizan con los procedimientos geométricos puros de la época griega, pero en cambio, esta circunstancia le permite resolver la cuestión en términos más generales.

La demostración que en este estudio doy al Postulado, y que siendo netamente geométrica, satisface plenamente, según mi opinión, se apoya en definiciones que pueden ser motivo de controversias, pero que a mi modo de ver, están en absoluto acuerdo con la realidad. En todo caso lo dicho sobre la sencillez de los conceptos en las demostraciones tiene también aplicación completa respecto de las definiciones con un proceso idéntico. Definir es reducir una idea complicada a otras más sencillas, claras y conocidas. Por eso es tan difícil hacerlo con las ideas básicas y fundamentales.

Si se toma el Postulado de Euclides como verdadero, bien sea admitiendo su demostración, o bien aceptándolo como un axioma, se llega a la Geometría Clásica Euclidiana que para mí es la única real y cierta. Pero si por no estimarse como suficientemente rigurosa ninguna de las demostraciones, se da por sentado que el Postulado de Euclides es falso, se llega a las Geometrías Planas no Euclidianas que, a mi modo de ver, no corresponden a nada real ni verdadero.

De lo único que podemos estar seguros con plena certeza y sin lugar a error, es de que existimos. Cada cual tiene conciencia de que existe, axiomáticamente, sin lugar a dudas, sin explicaciones. Yo existo. ¿Por qué? ¿Para qué? No; únicamente, yo existo. Estoy seguro de ello.

Enseguida viene la percepción de la existencia de todo lo demás que se hace por médio de los sentidos, y por la elaboración de estas percepciones dentro de un yo pensante. Estas percepciones ya son susceptibles de error pues los sentidos nos pueden engañar, y además es de suponer que sean distintas según la perfección de los sentidos de cada cual, y también según sus facultades de discernir. Es natural que el mismo fenómeno produzca impresión diferente en dos individuos de sentidos distintos, lo mismo que de la misma sensación un individuo pueda deducir consecuencias y modalidades distintas que otro. Por esto no se llega nunca a un acuerdo total, lo cual no debe desalentarnos, pues es necesario indagar todo lo que nos rodea como quien cumple una misión, con el fin de aproximarse a la realidad del universo.

En su famosa obra "Los Elementos", Euclides enuncia una serie de proposiciones que son el punto de partida fundamental para el desarrollo de las matemáticas. Entre éstas se encuentra la Nº 5 que algunos científicos no han aceptado como de la misma evidencia axiomática de las otras y que se ha denominado especialmente con el nombre de "Postulado de Euclides". Dice así: "Dos rectas de un plano que hacen de un mismo lado, con una tercera, ángulos cuya suma es inferior a dos ángulos rectos se cortan de ese lado".

Esta proposición se puede fácilmente convertir en otras expuestas en términos diferentes, lo cual no constituye tropiezo alguno para su estudio. Así vemos que algunos autores enuncian el Postulado de Euclides en distintas formas tales como: "Por un punto del plano se puede trazar una paralela a una recta dada, y solamente una".

Han sido muy numerosos los intentos de demostración del postulado de las paralelas. En su trabajo denominado "Sobre las Geometrías no Euclidianas, Notas Históricas y Bibliográficas" el ilustre sabio venezolano F. J. Duarte expone algunos de los principales y los critica. Este interesante estudio se encuentra publicado en la *Revista de la Academia Colombiana de Ciencias Exactas, Físico-Químicas y Naturales*, volumen VII, Nros. 25 y 26 de diciembre de 1946.

Suponiendo falso el postulado, se llega a las Geometrías Planas no Euclidianas, que han tenido diversos nombres tales como Pangeometría, Geometría Astral, Geometría Imaginaria. Los partidarios de estas geometrías no admiten ninguna demostración para el Postulado de Euclides. No obstante en este trabajo presento un ensayo que pongo a la consideración de los entendidos en la materia. Es apenas mi modo de ver las cosas bajo un aspecto que estimo de interés, relativo a la Geometría Clásica, con la cual estoy en perfecto acuerdo.

Como se verá, esta demostración requiere algunas definiciones previas y una explicación sobre el criterio que debe regir en lo referente a valores infinitos.

Por medio de los sentidos podemos apreciar que los objetos exteriores a nosotros tienen diversas cualidades, entre las cuales talvez la principal y que nos interesa más en los estudios de la Geometría, es la forma.

La idea de forma de un objeto nos viene de lo limitado de dicho objeto, pues la forma geométrica de un cuerpo viene a identificarse con su contorno o límite, donde ese cuerpo deja de serlo para ser algo distinto. Al conjunto de objetos que existen lo llamamos universo.

Superficie es el límite exterior de un cuerpo.

Línea es la intersección de dos superficies.

Punto es la intersección de dos líneas.

Espacio es el conjunto de puntos posibles.

Establecidas estas definiciones se puede ver fácilmente que no hay lugar a pensar en un espacio finito, pues tiene que ser infinita la posibilidad de existencia de puntos. Este concepto de espacio es netamente estático, pues no requiere la idea de movimiento, y aún puede considerarse independiente de la existencia de objetos materiales porque se puede concebir la existencia del espacio vacío así como tenemos una idea clara de un teatro sin espectadores o de una casa de habitación sin habitantes que la ocupen.

La idea de superficie, y por consiguiente las que de ella se derivan, corresponde a una abstracción imaginativa al concebir ese límite de los cuerpos como cosa independiente de ellos, pero si hacemos una segunda abstracción, desligamos aún más la idea de superficie de la de cuerpo y la colocamos sola en el espacio, nos damos cuenta de que puede prolongarse indefinidamente en todo sentido dividiendo el espacio en dos porciones ambas infinitas. A este concepto también se puede llegar por medio de una superficie cerrada a la cual hagamos crecer indefinidamente la parte de espacio comprendida interiormente dejando invariable uno de sus puntos, hasta que deja de ser cerrada y divide el espacio en dos porciones infinitas. Así también llegamos a la idea de una línea colocada en una superficie dividiéndola en dos porciones infinitas, y por último a la idea más sencilla de un punto de una línea dividiéndola en dos porciones infinitas.

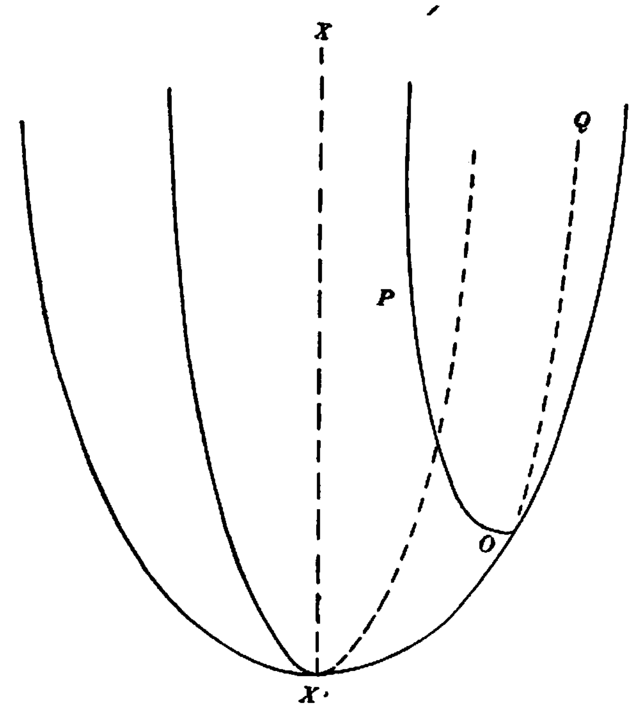


Figura 1

Al analizar las dos porciones infinitas en que el punto divide a la línea, o en que la línea divide a la superficie, o en que la superficie divide el espacio, vemos que esas dos porciones, siendo ambas infinitas, pueden ser desiguales. Enseguida exponemos los tres casos en los cuales salta a la vista la verdad de esa afirmación y que pueden reunirse en una misma figura. Si suponemos un paraboloide de revolución alrededor del eje XX' Fig. (1) y en esa superficie tomamos una parábola cualquiera POQ y a su vez en esa línea tomamos un punto cualquiera P, tendremos que el punto P divide a la parábola POQ en dos porciones infinitas desiguales, que la parábola POQ divide al paraboloide de revolución en dos porciones infinitas desiguales, y que el paraboloide divide al espacio en dos porciones infinitas desiguales.

Esta noción de infinitos desiguales no debe confundirse con la idea de infinitos de grados distintos que en este caso no correspondería a la comparación de dos porciones de una línea, o de dos porciones de una superficie, sino a la comparación entre una superficie y una línea, por ejemplo.

También podemos observar que si la parábola escogida hubiera cortado el eje XX' en el punto X', o si el punto escogido en la parábola hubiera sido el vértice O, las dos porciones de la superficie del paraboloide habrían sido iguales lo mismo que habrían sido iguales las dos porciones en que habría quedado dividida la parábola.

De manera que dentro del concepto geométrico de infinito tenemos la noción completa de tamaño y por consiguiente llegamos a la conclusión de que los infinitos así concebidos se pueden comparar, se pueden sumar, restar y en fin, que se les pueden aplicar todas las operaciones que ejecutamos con cantidades finitas.

Entonces podemos manejar el valor infinito bajo un criterio distinto del clásicamente establecido. Criterio éste más geométrico, que en mi opinión es más ajustado a la verdad, y que modifica sustancialmente la interpretación de ciertas ecuaciones, operaciones, etc., que al contemplarlas con este nuevo criterio dan resultados y deducciones diferentes. Veamos un ejemplo: si en un desarrollo algebraico encontramos la expresión $\frac{\infty}{\infty}$ es aceptado que este valor es indeterminado porque cualquier cantidad multiplicada por ∞ da ∞. Esto es cierto, pero si sabemos que el ∞ que está como numerador es la expresión de toda la parábola de la Fig. (1) y sabemos también que el ∞ que figura en el denominador es la expresión de la porción OQ, podemos asignarle a este $\frac{\infty}{\infty}$ un valor único de 2, descartando la posibilidad de que tenga cualquier otro, y ajustándonos a la verdad.

Lógicamente para razonar en esta forma es necesario apoyarse en una evidencia geométrica que obtenemos axiomáticamente; pero esta clase de certeza la tenemos con más claridad porque es más objetiva, y le da superioridad indiscutible a la Geometría sobre cualquier otra rama de las matemáticas que sea más abstracta.

Pasemos ahora a otras definiciones de importancia que se apoyan también en el criterio geométrico que acabamos de exponer:

Si consideramos la superficie de la Fig. (2) prolongada en todo sentido indefinidamente vemos que esta superficie divide al espacio en dos partes iguales. Además nos damos cuenta de que hay otras superficies de forma similar que también lo dividen en dos partes iguales y que sin dejar de ser infinitas son o más pequeñas o más grandes que ésta. A la más pequeña de estas superficies la llamamos "plano". Entonces, un plano es la menor superficie que divide al espacio en dos partes iguales.

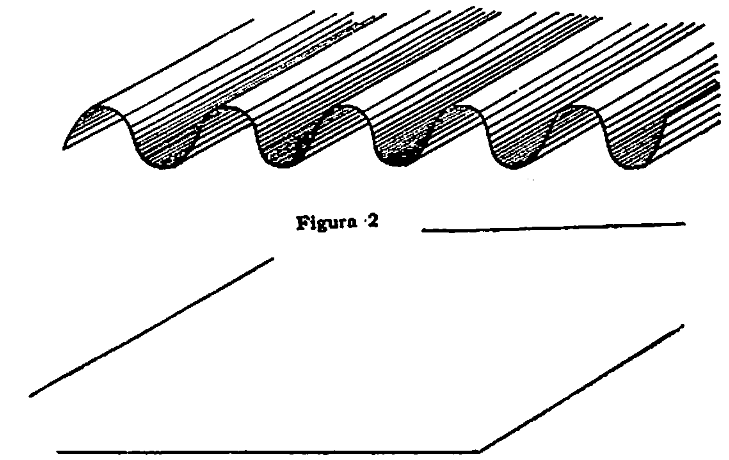


Figura 2

Línea recta es la línea que resulta de la intersección de dos planos. Es claro que también la línea recta es la línea menor que divide a un plano en dos partes iguales.

Estas definiciones también prescinden del movimiento, pues la recta definida en esta forma no requiere la idea de camino ni de traslado de un punto a otro.

Ya teniendo la definición de línea recta, entramos a analizar las particularidades geométricas dentro del plano.

En primer lugar vemos que en un plano P Fig. (3) si tomamos un punto O, siendo el plano P infinito en todo sentido, una recta que pase por el punto O puede tener cualquier dirección y entonces por el punto O se pueden trazar infinito número de rectas contenidas en el plano P.

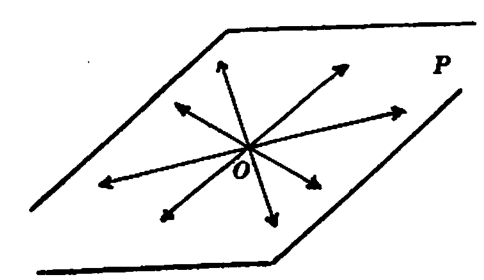


Figura 3

Todas estas rectas que se cortan en el punto O están divididas por este punto en dos partes infinitas e iguales.

Consideremos en la (Fig. (4) dos rectas $M'M$ y $N'N$ que se cortan en el punto O y que están situadas en el plano del papel.

El punto O divide a la recta $M'M$ en dos partes OM' y OM iguales e infinitas, y a la recta $N'N$ en dos partes ON' y ON iguales e infinitas. Estas porciones OM, ON, OM' y ON', siendo todas infinitas, son iguales en tamaño. En el lenguaje usual se llaman también rectas pero en realidad sería más riguroso llamarlas mitad de rectas, pero esta nueva denominación, a pesar de ser más rigurosa, no da una ventaja efectiva, pues al utilizar la usual se entiende perfectamente. Por esta razón no he querido en el presente trabajo abandonar el lenguaje usual.

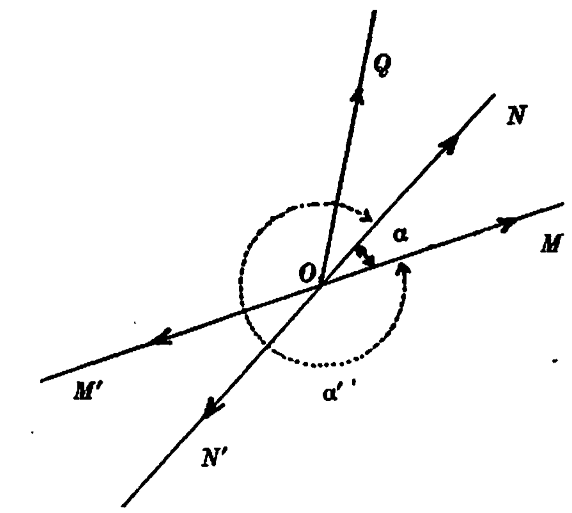


Figura 4

Ahora bien, si consideramos dos rectas de estas OM y ON definimos el ángulo que forman, como la parte del plano comprendida por esas dos rectas que se cortan en el punto O. El punto O común a las dos rectas lo llamamos vértice, a las dos rectas OM y ON las llamamos lados y la notación de este ángulo será $< MON$.

Esta definición implica comparación con la totalidad del plano que es infinito, el cual es la verdadera unidad y base fundamental de la noción de ángulo. Todo ángulo, siendo infinito por ser una parte del plano que es infinito, tiene un cierto valor, y este valor es susceptible de comparación con otros valores de la misma especie (otros ángulos). También podemos aplicar a estos valores infinitos todas las operaciones que aplicamos a cantidades finitas tales como suma, resta, multiplicación, etc.

Así vemos que para sumar dos ángulos basta colocarlos uno a continuación del otro con un lado común.

Así tenemos: $< MOQ = < MON + < NOQ$

$< MON = < MOQ - < NOQ$

y si suponemos que $< MON = < NOQ$

tendremos que $< MOQ = < 2NOQ$

y $< NOQ = \frac{< MOQ}{2}$

Además, nos damos clara cuenta de que no obstante ser infinitos los ángulos son proporcionales a cantidades finitas como son los arcos de circunferencia trazadas con vértice como centro e igual radio.

Si consideramos un ángulo cualquiera $< MON = \alpha$ observamos que el plano en realidad queda dividido en dos partes α y α' cuya suma es constantemente igual al plano completo. Si hacemos crecer el ángulo α hasta que sea igual al ángulo MOM' igual a la mitad del plano, α se hace igual a α' y a este ángulo le asignamos el valor de dos rectos, de manera que un ángulo recto es la cuarta parte de un plano.

Si hacemos variar el ángulo α de manera que lleguemos a que la recta ON coincida con la recta OM, caso límite en el cual no existe sino una sola recta, se nos forma una figura en la cual hay ángulo exterior α' igual al plano completo y un ángulo interior α igual a cero. Con este criterio y con estas definiciones se explica muy claramente también el significado de ángulos mayores que cuatro rectos, pues siendo la unidad básica el plano, no es forzoso que todos los ángulos sean menores; puede haber ángulos mayores: cinco rectos igual a un plano completo y un cuarto.

Por medio de sumas y restas podemos, de acuerdo con este criterio, demostrar el teorema de igualdad de dos ángulos opuestos por el vértice:

Sean las dos rectas LM y NQ Fig. (5) que se cortan en el punto O.

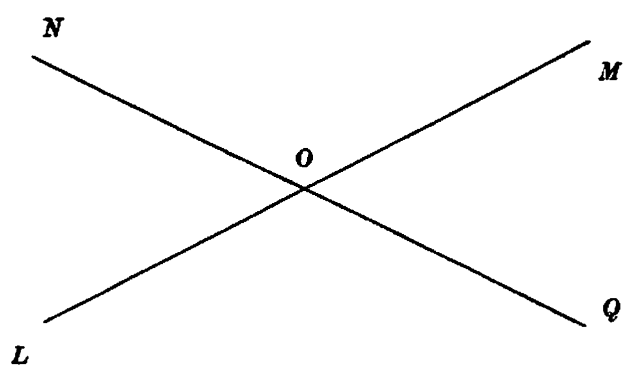


Figura 5

De acuerdo con lo que hemos visto, tenemos:

$$<LON + <NOM = \text{mitad del plano}$$

$$<NOM + <MOQ = \text{mitad del plano}$$

luego $<LON + <NOM = <NOM + <MOQ$

y por tanto $<LON = <MOQ$.

Así también se pueden demostrar bajo este nuevo aspecto de la Geometría todos los teoremas y proposiciones de la Geometría Clásica sin encontrar ningún tropiezo ni ninguna contradicción.

Pero vamos a ver qué sucede con las rectas paralelas:

Principiemos con la definición: Dos rectas paralelas son aquellas que estando en un mismo plano no se cortan, es decir, que no tienen ningún punto común.

Entre dos rectas paralelas también está comprendida una parte de plano, como entre el ángulo, de valor infinito, pero ya con el criterio de distintos tamaños del infinito, vamos a estudiarla:

Entre dos rectas paralelas está comprendida una parte del plano menor que la parte de ese mismo plano igual a un ángulo cualquiera.

En efecto, sean en la Fig. (6) las dos rectas paralelas LM y NQ y el ángulo α de vértice O. Si vamos sumando a sí misma la parte de plano comprendida entre las paralelas, es decir, la vamos duplicando, triplicando, cuadruplicando, y así sucesivamente, vamos encontrando las dos rectas paralelas LM y $l_1 m_1$, LM y $n_1 q_1$, LM y $l_2 m_2$, etc., y vemos que para llegar a obtener el plano completo se necesita repetir la parte comprendida entre LM y NQ un número infinito de veces.

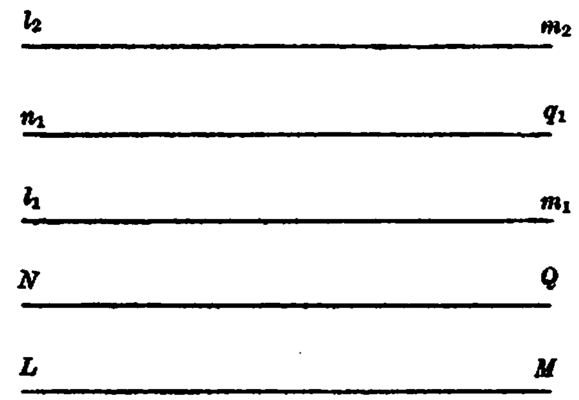
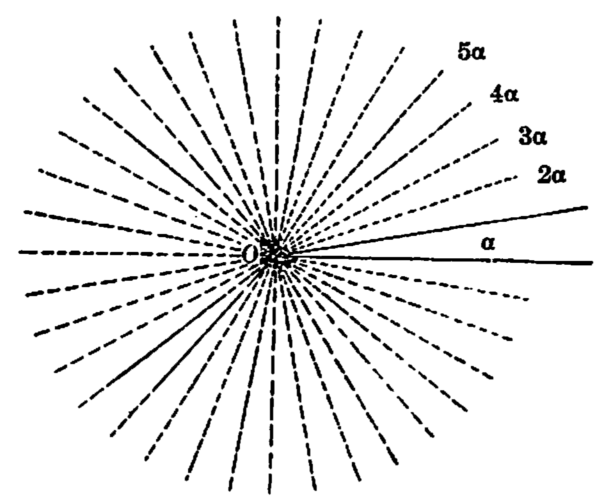


Figura 6



Ahora bien, si vamos repitiendo el ángulo α en la misma forma vamos obteniendo 2α, 3α, 4α, etc., y vemos que para obtener el plano completo es necesario repetir el ángulo α un número finito de veces.

Como la unidad del plano completo es la misma para las paralelas que para el ángulo α, de esto se deduce inmediatamente que el ángulo α, por pequeño que sea, es una parte mayor del plano que la comprendida por las paralelas.

Ahora, si dos rectas paralelas comprenden una parte de plano siempre menor que la de un ángulo, por pequeño que éste sea, esto significa que dos rectas paralelas son un ángulo cero.

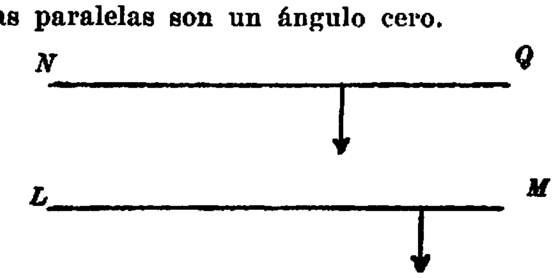


Figura 7

A esta misma conclusión llegamos en la Fig. (7) si consideramos que las rectas paralelas LM y NQ dividen cada una el plano en dos partes iguales; entonces, si tomamos las dos mitades del plano indicadas por las flechas y las restamos, encontramos que la parte de plano comprendida entre las paralelas tiene un valor de cero.

Llegamos así a una conclusión de apariencia paradojal, y es que la parte de plano comprendida entre dos rectas paralelas, siendo infinita, tiene un valor de cero.

Esta paradoja se resuelve fácilmente recordando que la definición de ángulos implica comparación con el plano completo, como dijimos anteriormente, y comparativamente al valor total del plano, lo comprendido por dos rectas paralelas, aún siendo infinito, no significa nada, y las dos paralelas como ángulo tienen un valor cero.

En esta forma llegamos también a la noción de valores ceros desiguales, lo mismo que anteriormente vimos la desigualdad de valores infinitos.

En la Fig. (6), al considerar las distintas rectas paralelas, que todas forman ángulos cero, observamos que los valores cero son diferentes: las paralelas $LM, .. l_2 m_2$ son un valor mayor que las $LM, .. n_1 q_1$ y éstas a su vez son mayores que LM, NQ. De manera que si suponemos las dos paralelas coincidiendo, ese valor cero será menor que todos los otros obtenidos con dos paralelas; pero este valor cero será siempre mayor que el obtenido en la Fig. (4) por la coincidencia de las rectas OM y ON, pues este último, a partir del punto O, no es infinito sino en un sentido, en cambio, el de las paralelas es infinito en dos sentidos. Entonces podemos asegurar que de todos los ángulos cero el más pequeño es el obtenido por la coincidencia de dos rectas que parten de un punto a la manera de OM y ON en la Fig. (4).

Si en una ecuación algebraica encontramos la expresión $\frac{0}{0}$ se le asigna el valor indeterminado porque cualquier valor multiplicado por cero da cero; pero si sabemos que el cero del numerador es el ángulo de las rectas LM y $l_2 m_2$ de la Fig. (6) y el cero del denominador es el ángulo de las rectas LM y NQ haríamos mal en no asignarle a esta expresión $\frac{0}{0}$ un valor único de 4.

Estas apreciaciones sobre $\frac{\infty}{\infty}$ y $\frac{0}{0}$ constituyen un nuevo aspecto interesante de la teoría sobre el verdadero valor de dichas expresiones.

Con este criterio, y apoyados en las definiciones expuestas anteriormente, se pueden demostrar todas las proposiciones de la Geometría Clásica; además se pueden hacer apreciaciones y consideraciones de interés, y se encuentra forma sencilla y clara de demostrar el famoso Postulado de Euclides, base fundamental de toda la Geometría. Vamos a verlo:

En la Fig. (8) tenemos la recta NQ y el punto O situado fuera de ella. Trazamos la recta LM que pasa por el punto O y es paralela a NQ. Además, trazamos el ángulo α con el lado OM común a la recta LM.

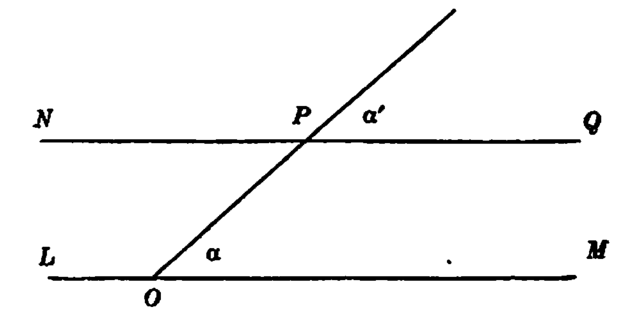


Figura 8

Como ya vimos, la parte del plano comprendida por las dos paralelas es siempre menor que la parte comprendida por el ángulo α por pequeño que sea el ángulo.

Entonces, teniendo un lado común, el ángulo sobrepasará a las paralelas y se descompondrá en dos partes, una común al ángulo y a las paralelas, es decir, que está comprendida interiormente por el ángulo y por las paralelas, y otra, que representa la diferencia, que está comprendida por el ángulo pero no por las paralelas, estará dentro del ángulo pero exterior a las paralelas. Entonces necesariamente habrá un punto en que el ángulo sobrepasa a las paralelas y en el cual, perteneciendo siempre a la parte interior del ángulo, se pasa del interior de las paralelas al exterior de las mismas. Ese punto P es en el que corta necesariamente el lado no común OP a la recta NQ.

De manera que si por un punto O exterior a una recta NQ se traza una paralela LM y además una recta OP que forme un ángulo cualquiera con la recta LM, esta recta debidamente prolongada cortará forzosamente a la primera recta NQ. Lo cual constituye el Postulado de Euclides.

Además, es de anotar que siendo el ángulo α' la diferencia entre el ángulo α y las paralelas NQ y LM y siendo cero el valor del ángulo de las paralelas, α' será igual a α y queda demostrado el fundamento de todos los teoremas relativos a rectas paralelas cortadas por una transversal.

Se ve claramente que la anterior demostración del Postulado se apoya en el principio que todo ángulo, por pequeño que sea, contiene una parte del plano mayor que la comprendida por dos paralelas.

En la demostración que da Bertrand, de la cual tuve conocimiento por la publicación hecha en la *Revista de la Academia Colombiana de Ciencias Exactas, Físico-Químicas y Naturales* del trabajo del gran matemático doctor F. J. Duarte, también se utiliza este principio, pero Bertrand lo demuestra en forma distinta.

El doctor Duarte le niega el rigor matemático a la demostración de Bertrand, por el hecho de "fundarse en la comparación de espacios infinitos". A la que yo presento podría hacer la misma observación.

No obstante la opinión muy autorizada del doctor Duarte, considero que ambas demostraciones son válidas. Ya he explicado en forma que creo suficientemente clara que con los infinitos se pueden hacer las operaciones aritméticas, si por cualquier circunstancia se tiene una certeza geométrica clara y precisa respecto de su tamaño. Así en la Geometría elemental se comparan los ángulos y no se puede negar que cada ángulo comprende un espacio infinito.

Por otra parte, no se puede rechazar "a priori" la comparación de infinitos, cuando vemos que en el cálculo infinitesimal se comparan cantidades infinitesimales.

Si se comparan racionalmente y con todo rigor matemático los infinitamente pequeños, de los cuales tenemos noción precisa de tamaño también por medio de la Geometría, ¿por qué no se pueden comparar los infinitamente grandes en iguales condiciones?

Los no Euclidianos niegan sistemáticamente, o ponen en duda alguna proposición que sirva como apoyo a una demostración del Postulado, por verdadera que ésta sea, y así es muy fácil asegurar que no se ha hecho nada. El doctor Duarte al criticar el trabajo denominado "Nota sobre las Geometrías Planas no Euclidianas" de nuestro gran matemático Garavito dice: "El error de Garavito al haber creído demostrar el Postulado de Euclides, consiste en no haberse dado cuenta de que reemplazó el célebre postulado por otra proposición no demostrada. En efecto, Garavito supone, implícitamente, que la relación que liga la distancia z y la tangente del ángulo β es algebraica, lo cual no es de ningún modo evidente a priori". Más adelante agrega: "Garavito no justifica su postulado de que la relación que liga un lado del ángulo recto de un triángulo rectángulo con la tangente del ángulo opuesto es algebraica, porque es imposible encontrar a priori fundamento a dicha hipótesis. Ahora, como precisamente en el sistema Euclidiano esta relación es algebraica, resulta que haciendo la hipótesis se cae forzosamente en el Postulado de Euclides. La demostración de Garavito no prueba, pues, nada", y aún más adelante: "Esta demostración de Garavito es también un claro ejemplo de los ensayos de demostración en que se reemplaza el Postulado de Euclides por otro postulado más difícil de admitir".

Es natural que Garavito, al hacer una demostración, reduzca implícitamente o explícitamente, una proposición a otras admitidas como verdaderas; esto sucede en cualquier demostración, y no es acertado negar a priori la proposición de que en un triángulo rectángulo un cateto y la tangente del ángulo opuesto están ligadas por una relación algebraica; esto lo sabemos por la definición misma de lo que se llama tangente de un ángulo.

Además, los no Euclidianos son rigurosos en exceso para las demostraciones del Postulado y aseguran que siempre se toman puntos de partida que son proposiciones "no demostradas" que les suscitan dudas en el entendimiento, pero no aplican este mismo rigor a las Geometrías Planas no Euclidianas. ¿Acaso Lobatchewsky ha demostrado en alguna parte que en un plano, por un punto dado fuera de una recta, se pueden trazar dos o más rectas no secantes? En lo que yo conozco no se encuentra esa demostración. ¿O será que suscita mayores dudas y es menos racional pensar que la tangente de un ángulo está ligada en forma algebraica con el cateto opuesto en un triángulo rectángulo, que la suposición de un ángulo de paralelismo variable con la distancia de un punto a una recta? Esto queda a juicio de cada cual. ¿O será que el doctor Duarte ha logrado demostrar que la relación que liga la tangente de un ángulo con el cateto opuesto en un triángulo rectángulo no es algebraica? En el importante estudio ya citado *supone* que no sea algebraica pero no lo demuestra.

Respecto a la otra crítica que hace el doctor Duarte a lo que él llama "Segundo ensayo de demostración al Postulado" hecho por Garavito, vamos a analizarla:

Dice el doctor Duarte: "El segundo ensayo de demostración del Postulado de Euclides, expuesto por Garavito, se funda en la interpretación geométrica de las soluciones de los sistemas de ecuaciones lineales con dos y tres incógnitas que señala la Geometría Analítica. Esta interpretación consiste, como se sabe, en convenir a priori en llamar punto a un conjunto de dos o tres variables (o de n variables en el hiperespacio), recta a una ecuación de primer grado entre dos variables o a un sistema de dos ecuaciones de primer grado entre tres variables, etc. Las soluciones de las ecuaciones lineales se pueden enunciar entonces en este lenguaje geométrico convencional y así resulta que el Postulado de Euclides corresponde al caso de imposibilidad o incompatibilidad del sistema de dos ecuaciones de primer grado con dos variables. Es decir, el caso en que las soluciones son infinitas, corresponde al caso de la paralela única (Postulado de Euclides) y concluye Garavito:

'En todo lo que acabamos de decir nos hemos referido al Algebra pura: las variables no son coordenadas sino simples cantidades numéricas y por tanto no es el caso de señalar petición de principio ni círculo vicioso'.

El error de Garavito consiste en haber olvidado que los teoremas conocidos de Geometría, enunciados cuando se consideran los puntos, líneas y superficies como variedades definidas analíticamente, no son en realidad verdades geométricas, sino verdades enunciadas en un lenguaje geométrico, las cuales no se aplican a figuras concretas de geometría mientras no se acuerden previamente con los postulados fundamentales o de base.

Pretender, pues, que la condición de incompatibilidad de ecuaciones de primer grado sea una demostración del célebre postulado, es caer en círculo vicioso o petición de principio. En efecto, para probar que una ecuación de primer grado con dos variables representa una línea recta y que recíprocamente, toda línea recta está representada por una ecuación de primer grado, es preciso basarse en el postulado mismo que se pretende demostrar. Es decir, para acordar en este caso el lenguaje analítico con el geométrico es preciso admitir previamente el Postulado de Euclides".

El mismo Garavito al hablar de que "solamente se ha referido al *Algebra pura y que las variables no son coordenadas sino simples cantidades numéricas*" indica claramente que no se trata de un problema geométrico y por tanto no es el caso de anotarle petición de principio o círculo vicioso.

Pero si se acepta el lenguaje geométrico convencional, lenguaje que utiliza en sus numerosas y valiosas obras de matemáticas también el doctor Duarte, se comprueba que a la incompatibilidad de ecuaciones de primer grado del Algebra pura, *corresponde* la evidencia del Postulado en Geometría pura.

En realidad lo que sucede es que rechazar el Postulado significaría derrumbar el sólido edificio de la Geometría Analítica y del Cálculo Infinitesimal que utilizan este lenguaje convencional, del cual tiene convicción firme de cosa cierta el mismo doctor Duarte.

En mi concepto, nuestro sabio Garavito, talvez sin pretenderlo, hizo dos demostraciones rigurosas e irreprochables del Postulado de Euclides, la segunda de las cuales, hecha en términos abstractos y analíticos, es una demostración general y aplicable al espacio de n dimensiones (concepto completamente abstracto). Esta demostración requiere previamente las definiciones que Garavito incluye en su trabajo y no se le puede anotar petición de principio porque se refiere a un análisis abstracto que responde a un lógico razonamiento matemático. Es una demostración del postulado en un espacio, en un plano y con líneas definidas analíticamente *y sin salirse del Algebra pura.*

Para que se pueda juzgar sobre este punto, transcribimos a continuación las definiciones dadas por Garavito y la parte completa de su trabajo relativa a este asunto: "Llamemos espacio a un continuo ilimitado de tres variables independientes; punto al conjunto de valores particulares de cada una de las variables (un valor para cada variable); superficie al conjunto de los puntos cuyas características numéricas satisfacen a una ecuación entre las tres variables; línea al conjunto de puntos cuyas características numéricas satisfacen a dos ecuaciones entre las tres variables.

Las superficies más sencillas serán las representadas por las ecuaciones más sencillas, esto es, por ecuaciones de primer grado entre las tres variables. Llamemos planos a estas superficies.

Las líneas más sencillas serán las designadas por parejas de las ecuaciones de primer grado entre las tres variables. Llamemos rectas a estas líneas.

Las propiedades de las ecuaciones de primer grado con dos o con tres variables, traducidas al lenguaje convencional que hemos adoptado, nos permiten enunciarlas en la forma siguiente:

Dos rectas que tengan dos puntos comunes se confunden en toda su ilimitada extensión.

Dos planos que tengan tres puntos comunes no situados en línea recta, se confunden en uno solo.

Si por dos puntos de un plano se hace pasar una recta, ésta estará íntegramente situada en el plano.

Por un punto situado fuera de un plano no se puede trazar sino un solo plano que sea incompatible (paralelo) al primero. (Postulado referente a los planos).

Por un punto situado fuera de una recta y en el plano determinado por el sistema de la recta y el punto, no se puede hacer pasar sino una sola recta que sea incompatible (paralela) a la primera. (Postulado de Euclides).

En todo lo que acabamos de decir nos hemos referido al Algebra pura: las variables no son coordenadas sino simples cantidades numéricas y por tanto no es el caso de señalar petición de principio ni círculo vicioso.

Basta un poco de reflexión para comprender que el Postulado de Euclides no es una propiedad geométrica fortuita, sino un caso particular de una propiedad analítica aplicable a la cantidad en general.

En nada se alterarían las consecuencias al considerar un continuo de n variables en lugar de tres, siempre que se llame recta a un sistema de n–1 ecuaciones de primer grado entre las n variables, y plano a un sistema de n–2 ecuaciones entre las mismas n variables independientes".

No es justo colocar las Geometrías Planas no Euclidianas en pie de igualdad con la Geometría Clásica. El Postulado de Euclides es cierto aun cuando grandes mentalidades no lo admitan, o no quieran admitir su demostración. Para otras grandes mentalidades no menores en autoridad y prestigio el postulado es cierto axiomáticamente o tiene demostración valedera, y la Geometría que de él se desprende corresponde a la realidad, y al concepto que todos tenemos de espacio, plano, recta, etc.

Transcribimos enseguida el resumen de conclusiones a que llega Garavito en su estudio, resumen que no rechaza ni comenta el doctor Duarte:

"En resumen: La Geometría de Lobattcheffsky es verdadera sin que por ello dejen de serlo las de Euclides y Riemann; pero mientras la primera se refiere al estudio de las propiedades de las figuras situadas sobre superficies de curvatura negativa y la última al estudio de las figuras situadas sobre esferas reales, la de Euclides se refiere a las figuras planas. No hay en el fondo contradicción entre el Postulado de Euclides y los de Lobattcheffsky y Riemann. La suma de los ángulos de un triángulo esférico es mayor que dos rectos sin que dejen de valer dos rectos la suma de los ángulos de un triángulo rectilíneo.

"El error consiste en designar con los nombres de geometrías planas no Euclídeas a las geometrías esféricas y en poner en duda el Postulado de Euclides".

Es cierto que en el fondo no hay contradicción entre los postulados que sirven de base a la Geometría Clásica y a las no Euclidianas. La suma de los ángulos de un triángulo es igual a dos rectos en el plano, es mayor que dos rectos en una superficie esférica, y el caso de esta suma menor que dos rectos corresponde a la superficie esférica de radio imaginario. Pero al colocar Riemann y Lobattcheffsky sus geometrías, que son esféricas, en un plano, sus postulados dejan de ser verdaderos porque no es correcto ni aceptable confundir la superficie esférica con el plano, ni adoptar como rectas los círculos máximos de una esfera real o imaginaria.

Con el mismo sistema con que se niega o se pone en duda el Postulado de Euclides en Geometría, se podría hacer lo mismo con verdades elementales de otras ciencias llegando a innovaciones semejantes a las Geometrías Planas no Euclidianas.

Tomemos, por ejemplo, el Algebra:

Si se pone en duda el principio fundamental de que $a + a = 2a$ y así como Lobattcheffsky introduce el ángulo de paralelismo, se introduce el módulo o parámetro de igualdad, se supone que $a + a = 2a + k$, siendo k un valor que varía según el tamaño de a y que en nuestras cantidades conocidas en la vida normal es inapreciable por tratarse de magnitudes pequeñas, y sobre esta base se establecen fórmulas encadenadas por razonamientos matemáticos impecables, se hace la creación de Algebras no Clásicas que serían distintas según que el parámetro de igualdad fuera positivo (Pan-álgebra), negativo (Algebra Astral), o imaginario (Algebra Imaginaria). El Algebra Clásica sería un caso particular en el cual el parámetro de igualdad k fuera igual a cero.

Además, para completar la innovación y dejar siempre en pie las nuevas Algebras no Clásicas se podría exigir con implacable rigor la demostración del postulado $a + a = 2a$ y cada vez que alguno de buena fe hiciera una demostración se pondría en duda, se negaría, y desconocería alguna proposición en que necesariamente tendría que apoyarse, calificándola de "no demostrada", lo mismo que se podría poner en duda, negar y desconocer las definiciones de cantidad a, de los signos más e igual, y del número dos. Todo esto podría resultar muy curioso, de ingenio muy sutil, y podrían ser admirables los juegos malabares hechos con la inteligencia, pero no implicaría que el Algebra dejara de subsistir como la única cierta, y las pan-álgebras o álgebras imaginarias serían en absoluto carentes de significado.

En resumen:

El Postulado de Euclides es una verdad que puede ser rigurosamente demostrada si se abandona el procedimiento de negar o poner en duda sistemáticamente definiciones y proposiciones fundamentales aun cuando éstas sean notoriamente ciertas.

La Geometría de Riemann es verdadera si se coloca, no en el plano, sino en una superficie esférica, y entonces implícitamente se reduciría a la Geometría Clásica, porque se apoyaría en propiedades y particularidades Euclidianas de la esfera.

La Geometría de Lobattcheffsky es verdadera, no en el plano, sino en una superficie esférica de radio imaginario.

Las Geometrías *Planas* no Euclidianas no corresponden a nada real ni verdadero, y se basan en hipótesis y suposiciones cuyos postulados fundamentales, no solo no han sido demostrados, sino que no tienen a primera vista el mismo grado de evidencia que el Postulado de Euclides, al contrario, repugnan al entendimiento.

Este es mi modo de pensar que como dije inicialmente someto con todo respeto a la consideración de los entendidos en la materia.

NOTAS A LA FLORA DE COLOMBIA. X

JOSE CUATRECASAS
Chicago Natural History Museum.

GUTTIFERAE

En esta nueva contribución a la Flora de Colombia se publican las especies nuevas que han resultado de mi reciente estudio de las Gutíferas colombianas, hecho a base de las colecciones del autor reunidas al servicio de la Universidad Nacional, del Departamento de Agricultura del Valle o en excursiones particulares. Además se han estudiado materiales existentes en el Herbario del Chicago Natural History Museum y otros gentilmente prestados por el Departamento de Botánica de la Smithsonian Institution. En un trabajo anterior (1) se indicaba el considerable aumento que el estudio de estas colecciones aporta al conocimiento de las *Guttiferae* de Colombia, sobre las cuales nada se adelantó desde los estudios de Planchon y Triana y de la monografía de Vesque. Especialmente el género *Clusia*, del cual Triana y Planchon enumeran 16 especies en su Prodromus, resulta favorecido con las nuevas colecciones. Es también lógico que del estudio de una mayor suma de materiales resulte necesario modificar el criterio sobre algunos de los géneros concebidos por aquellos insignes autores. Varios de estos géneros fueron creados sobre material floral de un solo sexo o bien sobre un reducido número de especies, de tal modo que el hallazgo de otras formas nuevas puede venir a modificar el concepto original. De ello resulta la refundición de *Astrotheca* con *Clusiella*, de *Tovomitopsis* con *Chrysochlamys* y quizás de otros. En estudios posteriores habrá que revisar las secciones tan inteligentemente establecidas por Planchon y Triana, y probablemente se establecerán otras nuevas. También queda para más adelante el profundizar sobre los límites entre géneros admitidos, que hoy día no están muy claros, como ocurre con *Clusia* y *Tovomita;* diversas especies del grupo de *T. chachapoyasensis* Engler, *T. Weberbaueri* Engler no están en posición muy definida, así como mis *T. silvatica, T. parviflora, T. frigida, C. tenuifolia* y algunas otras. Por estas causas y por existir otras colecciones colombianas aún para estudiar, o en estudio por otros colegas, sería prematuro ofrecer hoy día un resumen del *status* de las *Guttiferae* en Colombia. Tales razones aconsejan aplazar el intento de comunicar dicho resumen para una futura contribución. Por el momento me limito a indicar que en esta nota se describen 51 especies y 4 variedades de *Clusia,* 6 especies y 1 variedad de *Chrysochlamys,* 1 especie de de *Pilosperma,* 2 de *Clusiella,* 1 de *Oedematopus,* 5 de *Tovomita* y 2 de *Caraipa;* además se establecen 3 nuevas combinaciones.

(1) Gutíferas nuevas o poco conocidas de Colombia. Anales del Inst. de Biología. México, XX. pág. 91, 1949.

CLUSIA FRUCTIANGUSTA Cuatr., sp. nov.

Arbor grandis. Ramuli grisei, terminali hexafarium carinati glabri, cortice lignoque valde luteoresinoso.

Folia simplicia opposita crasso-coriacea rigida sessilia glabra. Lamina obovato-oblonga subspathulata vel spathulata, basim versus sensim sine sensu angustata, basi ramum leviter latior subamplectens apice rotundata vel truncata, margine laevis leviter revoluta; supra pallido-viridis nervo medio notato lateralibus paulo prominulis; subtus pallidior nervo medio crasso eminenti, nervis lateralibus numerosis parallelis 2-3 mm. distantibus angulo acuto prope marginem in nervum submarginalem anastomosatis, reliqua laevis. 8-18 cm. longa, 3.5-8.5 cm. lata.

Dioica. Inflorescentiae masculae terminales dichasiales paniculatae valde floribundae folia satis excedentes pedunculo robusto 3-8 cm. longo, cetera 10-15 cm. longa ramulis florigeris multifloribus dichotomis. Bracteae late ovatae obtusiusculae amplectentes membranaceae patulae 5-3 mm. longae. Internodii ultimi breves. Pedicelli bracteis breviores vel subaequilongi. Sepala 6 membranacea valde concava, per paria decussata dispossita, 6-9 mm. longa, 4-7 mm. lata, quattuor exteriora suborbicularia breviora, duo interiora elliptica longiora. Petala 4, decussata, in duobus paribus cum sepalis alternantibus, obovato-elliptico-oblonga apice rotundata, circa 12 mm. longa, 8 mm. lata rubra, basim versus atropurpureo maculata. Staminodia staminaque plura monadelpha, in pulvinulum compactum crassum torulosum subtetragonum supra quadri-lobatum valde resinferum concrescentia. Superficie loborum leviter granulosa, lateris parce striata, singula staminodia originalia denunciat. Stamina fertilia filamentis in pulvinum immersis; antheris octo globosis unilocularibus, supra pulvinum sessilibus subimmersis, duabus in quoque lobo dispositis, raro singula anthera pro singulo lobo; alteris antheris (8-4) brevioribus ellipticis horizontalibus bilocularibus plus minusve evolutis (plus minusve fertilibus) lateraliter in pulvinulo dispossitis, aliquando octo sed saepe tantum quattuor cum lobulis alternantibus praesentibus, raro defectis. Pulvinulus staminorum 4-5 mm. diam., 3 mm. altus, luteus viscosus.

Inflorescentiae femineae masculis similes sed saepe minus evolutae folia non excedentes, ramulis secundariis magis abbreviatis. Sepala 6 membranacea, decussata, exteriora valde concava obovato-rotundata plusminusve 6 mm. longa et lata, mediana subordicularia concava 8-9 mm., interiora oblonga 9-10 mm. longa, 4 mm. lata. Petala 4 decussata,