

Cuando nos ocupemos de Karsten en esta Revista, hablaremos de las relaciones que tuvo con Triana y de las obras y trabajos que realizó en su compañía.

La biografía a que hemos venido refiriéndonos, se ha editado con lujo y contiene algunas reproducciones artísticas de plantas clasificadas por Karsten.

\* \* \*

#### SOBRE LAS GEOMETRIAS NO EUCLIDEANAS

Con este título ha aparecido recientemente un folleto del ilustre ingeniero venezolano y miembro correspondiente de la Academia de Ciencias de Colombia, doctor F. J. Duarte. Se ocupa en él este experto expositor de las soluciones que se han dado del postulado de Euclides por géometras antiguos y modernos, con notable acopio de datos históricos y bibliográficos.

En realidad tales soluciones pueden considerarse como simples ensayos de demostración, como lo considera el Profesor Duarte y lo entendemos nosotros. En este punto no tenemos observación que hacer. Pero como este eminente matemático venezolano se extiende largamente sobre los conceptos de Garavito que aparecen en su opúsculo: "Nota sobre las Geometrías planas no euclídeas", nos ha parecido conveniente analizar la crítica del doctor Duarte a espacio en algún escrito posterior, ya que él estima que Garavito intentó demostrar el postulado de Euclides.

Tenemos por el Profesor Duarte un profundo respeto, pues siempre se ha mostrado en sus escri-

tos como un erudito de primer orden y sabe raciocinar con un criterio matemático poco común. Por eso cuanto él opine nos merece especial atención, y así habremos de reproducir en estas columnas, en el número próximo venidero de la Revista, el escrito: "Sobre las Geometrías no euclídeas", si su autor nos concede permiso para ello.

\* \* \*

#### CONCEPTOS ECONOMICOS DE GARAVITO

Hemos vacilado mucho antes de dar principio a la inserción en esta Revista de los escritos sueltos del sabio Profesor que se refieren a cuestiones de Economía Política contempladas desde sus puntos de vista, porque pensamos que algunos pueden criticar tal inserción considerándola impropia de la publicación, cuyas páginas se han dedicado exclusivamente a estudios estrictamente científicos. Pero como sabemos que Garavito tenía en gran aprecio sus consideraciones económicas, que estimaba más que sus investigaciones matemáticas, por fin nos inclinamos a ir reproduciendo, poco a poco, varios folletos y hojas sueltas que contienen la esencia de sus doctrinas en esta materia, y que muy pocos conocen.

Por ahora nos contentamos, en la presente entrega, con insertar dos de sus comentarios sueltos: "Causas de la guerra de 1914" y "Evolución en la distribución de la riqueza" que habrán de servir para justificar la publicación de algunas conferencias que dictamos hace ya bastante tiempo, con el ánimo de explicar y comentar los conceptos del maestro.

#### TRABAJOS ACADEMICOS

### CRITICA AL ESTUDIO DE UNA POSIBLE FORMA DE EQUILIBRIO DEL GLOBO TERRESTRE (1)

JULIO CARRIZOSA VALENZUELA  
Ex-Rector de la Universidad Nacional de Colombia

Con el fin de corresponder a la invitación hecha por el Profesor Belisario Ruiz Wilches, para que quienes asistimos a su conferencia o leímos el resumen que de ella ha hecho en la Revista de la Universidad Nacional de Colombia, analicemos sus teorías y las sometamos a nuestra crítica de meros aficionados, nos atrevemos a intervenir para presentarle al ilustre Profesor algunas observaciones hijas del interés que ha despertado en nosotros su estudio, y del deseo que, por lo tanto, abrigamos para que se siga discutiendo, por personas más autorizadas que nosotros, la tesis científica que él propugna, o, mejor dicho, la tesis que se desprende de la teoría expuesta por el doctor Ruiz, ya que él se limita a presentar los resultados de su estudio, admitiendo que "no cree haber hallado una verdad, pero que espera que otros encuentren las razones de las concordancias por él observadas, o rectifiquen los errores que su escrito pueda contener". Son sus propias palabras.

La cuestión presentada ha sido objeto de muchas, muy variadas y algunas muy profundas investigaciones, desde el descubrimiento de la ley de la gravitación universal por Newton (1688) hasta nuestros días. Según Paul Appell (2) se pueden distinguir tres ciclos en esta larga etapa de investigaciones sobre la forma de nuestro globo terrestre: el de los elipsoides de revolución y de los anillos, como figuras de equilibrio en los cuerpos rotantes, caracterizado por los trabajos de Maupertuis (1732), Maclaurin (1742), Clairaut (1743), hasta Laplace (1776) y Legendre (1789); el de los trabajos de Jacobi (1834), Mme. Kowalevski (1888) y Poincaré (1885), en el cual se introducen los elipsoides de tres ejes y se establece por Mme. Kowalevski de manera rigurosa la forma anular como figura de equilibrio y, en fin, el ciclo actual singularizado por la introducción de nuevas e inesperadas figuras de equilibrio, como la llamada *periforme* establecida por el mismo Poincaré y por Liapounoff (1896). Para una información completa sobre el particular remitimos al lector a la excelente introducción histórica y a la bibliografía de más de cien obras sobre la materia, presentadas por Paul Appell en la obra ya citada.

A pesar de los trabajos nombrados, no puede decirse que el problema de la determinación de la forma que toma una masa líquida o fluída aislada en

el espacio, y que se mueve de manera que las distancias entre sus partículas se mantengan invariables, haya sido resuelto de manera general. Ni en el sentido de haber obtenido todas las figuras de equilibrio posibles, ni desde el punto de vista del acuerdo perfecto entre la figura de equilibrio obtenida y la forma del llamado *geoide*. Existen, por lo tanto, amplias posibilidades para que el investigador moderno pueda cosechar aún muchos y muy variados frutos en este campo de la Ciencia. Desde este punto de vista, pues, se justifican de sobra las hipótesis que introduce el Profesor Ruiz Wilches en su estudio, ya que las cosas no han marchado satisfactoriamente con ninguna de las teorías hasta ahora expuestas. Sin embargo, y a pesar de las concordancias señaladas por el ilustre Profesor, como consecuencia de su teoría, es nuestro parecer que se quedan atrás sin explicar algunas cuestiones, fundamentales unas, accesorias otras, las que valdría bien la pena discutir antes de acoger con demasiado optimismo los resultados alcanzados en el estudio en cuestión.

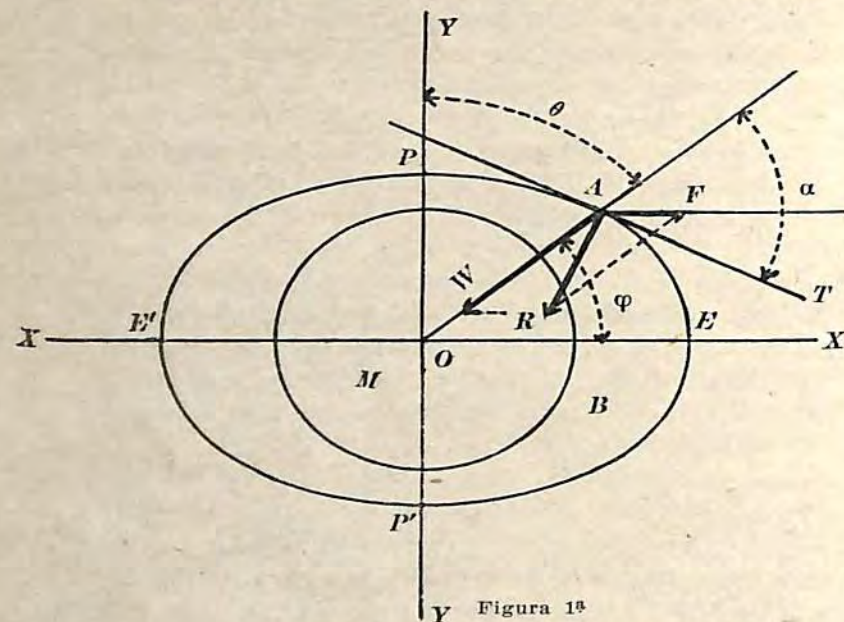
Nos referimos en primer término — y es ésta nuestra primera objeción — a las bases mismas del cálculo aceptadas por el Profesor Ruiz Wilches. En este respecto puede decirse que se aparta de las hipótesis hasta ahora empleadas (lo cual no sería censurable desde luego) para seguir un derrotero muy cuestionable a nuestro juicio; pero lo hace sin detenerse a justificar dichas bases, entre las cuales figura su nueva expresión de la fuerza centrífuga, que está en pugna con lo que ha sido aceptado hasta hoy en la Mecánica clásica. Adopta, además, como punto de partida el mismo que ha servido para estudiar la forma de los macizos gaseosos en rotación cuando se inicia en ellos una condensación central (nebulosa de Laplace) (3).

Salvo la expresión adoptada por el Profesor Ruiz para la fuerza centrífuga, el cálculo que hacen los autores nombrados es idéntico y conduce naturalmente a la misma ecuación desde el punto de vista analítico. Para puntualizar la trascendencia que tiene este punto de vista, nuevo si se mira al problema que con él se trata de resolver, consideremos la misma figura que trae el Profesor Ruiz en su estudio, corregida en el sentido de hacer perfectamente esférica la parte central, como lo acep-

(1) V. Revista de la Universidad de Colombia: número 4.  
(2) Figures d'équilibre d'une masse liquide homogène en rotation sous l'attraction newtonienne de ses particules.

(3) V. F. Tisserand: Traité de Mécanique Céleste, Tome IV, p. 233. También E. Roche: Essai sur la constitution et l'origine du système solaire. También Poincaré: Leçons sur les hypothèses cosmogoniques.

ta él tácitamente. En estas condiciones, la forma de la tierra, o en particular la de uno de sus meridianos  $PE$  se deduce mediante la hipótesis de que cualquiera de sus puntos  $A$  está en equilibrio, sometido a la acción atrayente de una masa  $M$  concentrada en el centro  $O$  de la tierra, y a la fuerza centrífuga  $F$  (igual al doble de lo normal según el Profesor Ruiz) debida a la rotación de toda la masa alrededor del eje  $YY$ . Esto equivale a suponer un cuerpo central  $M$  esférico, o cuyo achatamiento sea prácticamente despreciable, y una región  $B$  comprendida entre la parte esférica y la superficie exterior, cuya acción gravitatoria sea también despreciable; es decir, se suponen las mismas condiciones que se dan si se considera que  $M$  es un cuerpo celeste cualquiera y  $B$  una atmósfera muy tenue, cuya masa se puede estimar como muy pequeña con respecto a la del cuerpo central.



Si se acepta la tesis anterior, el cálculo es tan sencillo como lo supone el Profesor Ruiz; mas si la región  $B$  interviene también en la atracción general, como es lo cierto si aceptamos sin restricción la ley de Newton, el cálculo presentará todas las complicaciones que le han dado a este problema tan singular atractivo para los hombres de ciencia atrás nombrados, y que en él se han ocupado sin resolverlo completamente.

Empleando el análisis, y con relativa facilidad, podemos hacer ver la diferencia apuntada. Llamemos, en efecto,  $X Y Z$  las proyecciones de la fuerza atractiva  $W$  sobre los tres ejes coordenados. Como un punto cualquiera material de masa unidad  $A$  debe estar en equilibrio dinámico bajo la acción de dicha fuerza y de la fuerza centrífuga  $F$  de proyecciones  $2\omega^2 x$  y  $2\omega^2 z$  (4) sobre los mismos ejes  $X Y Z$  respectivamente, el principio del trabajo virtual nos permite escribir la siguiente ecuación:

$$(X + 2\omega^2 x) \delta x + Y \delta y + (Z + 2\omega^2 z) \delta z = 0 \quad (1)$$

(4) Es decir el doble de la fuerza centrífuga corriente.

Si llamamos  $V$  el potencial de las fuerzas de atracción  $W$  se pueden poner las siguientes igualdades, cuya significación es por demás conocida, dado que el sistema de fuerzas de atracción es conservativo:

$$X = \frac{\partial V}{\partial x} \quad Y = \frac{\partial V}{\partial y} \quad Z = \frac{\partial V}{\partial z}$$

Sustituyendo en (1):

$$dV + 2\omega^2(x\delta x + z\delta z) = 0$$

E integrando:

$$V + \omega^2(x^2 + z^2) = C \quad (2)$$

en la que  $C$  es una constante igual a  $\frac{kM}{b}$ ; si adoptamos los mismos símbolos del artículo que discutimos. Como se ve, hemos aceptado la misma expresión de la fuerza centrífuga utilizada por el Profesor Ruiz; es decir, una fuerza centrífuga doble de la usual. Si hubiésemos empleado la fuerza centrífuga verdadera, habríamos llegado a la expresión:

$$V + \frac{1}{2}\omega^2(x^2 + z^2) = C \quad (3)$$

la que, como se ve, sólo difiere de la anterior en el coeficiente del segundo término. En ambas expresiones  $V$  es el potencial de las fuerzas de atracción. Para el caso supuesto de la esfera se tiene:

$$V = \frac{kM}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \quad (4)$$

en que  $k$  es la constante de la gravitación universal y  $M$  la masa de la tierra. Este valor de  $V$  reemplazado en (2) nos da para la superficie de nivel la ecuación siguiente:

$$\frac{kM}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} + \omega^2(x^2 + z^2) = C \quad (5)$$

Si hacemos en la expresión anterior  $z$  igual cero y tenemos en cuenta que el radical es igual a la distancia de un punto cualquiera  $A$  al centro  $O$ , o sea  $\rho$  radio vector de un punto de la superficie de nivel, obtendremos la expresión de la curva meridiana, intersección de la superficie de nivel con el plano de los ejes  $YX$ . Es decir la misma expresión (1) establecida por el Profesor Ruiz en su escrito.

Mas si, por otra parte, suponemos que la masa encerrada por la superficie exterior participa en la atracción, tendremos una expresión del potencial  $V$  mucho más complicada que la (4), debido a que entonces, sería preciso calcular y adoptar el potencial de una masa distinta a la esférica y que satisfaga la condición (2). Dicha masa estaría limitada por una superficie cuya ecuación podemos representar por:

$$\phi(x, y, z) = 0$$

Como los desalojamientos virtuales del punto  $A$  a que se refiere el principio utilizado, sólo pueden

tener lugar en la superficie anterior, ellos deberán cumplir la siguiente relación:

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} \delta x + \frac{\partial \phi}{\partial y} \delta y + \frac{\partial \phi}{\partial z} \delta z = 0$$

Y como estos mismos puntos  $A$  deben cumplir la relación (1), es necesario que se tenga:

$$\frac{X + 2\omega^2 x}{\frac{\partial \phi}{\partial x}} = \frac{Y}{\frac{\partial \phi}{\partial y}} = \frac{Z + 2\omega^2 z}{\frac{\partial \phi}{\partial z}} \quad (6)$$

Sería preciso, por consiguiente, determinar la función  $\phi$  de manera adecuada para que se cumplan las dos condiciones anteriores; pero, al mismo tiempo, las componentes  $X, Y, Z$ , de la atracción  $W$  dependerán a su vez de la misma función, y por intermedio de una expresión bastante complicada, hasta el punto de que, como queda dicho, el problema no ha sido resuelto aún de una manera general.

Volviendo a la solución simple (5), y aun admitiendo que ella sea aceptable como solución de este problema, quedaría por demostrar la conveniencia de introducir en el planteo inicial una fuerza centrífuga inusitada. ¿Qué razones puede aducir el Profesor Ruiz, para introducir en sus cálculos el doble de la fuerza centrífuga que correspondería según la Mecánica clásica? Y al hacerlo ¿cómo puede hablar de que su teoría respeta las leyes de esa Mecánica, si comienza por establecer una expresión extravagante de la fuerza centrífuga, que nada tiene qué ver con dichas leyes? Se nos ha replicado que, precisamente, en tal expresión nueva reside la originalidad de la tesis que él presenta, ya que no habiendo sido posible un acuerdo entre la teoría y la observación, queda abierto el campo a la hipótesis, así que él, usando de un derecho inobjetable en tales casos para el científico, se ha aventurado a proponer una nueva hipótesis, la suya propia, con la cual ha logrado obtener los notables acuerdos que él reseña en su trabajo. Mas nosotros nos atreveríamos a contestar que este recurso de las nuevas hipótesis es el más expedito, y que de él echan mano sin tasa ni medida los arbitristas en ciencias, donde también los hay, como en todo. Pero el problema quedaría sin una solución en el fondo, porque ¿cómo conectar estas hipótesis con las teorías mecánicas antiguas o modernas? Bien estaría la nueva hipótesis si con ella encontráramos distintos y más seguros caminos hacia hechos nuevos, o conectáramos regiones de la Ciencia hasta hoy separadas. Esta sí sería la hipótesis fecunda; mas la hipótesis que sólo sirve de trampolín para saltar por sobre la dificultad, nada representa ni significa fuera de la cuestión por ella resuelta. Tememos que la hipótesis propuesta por el Profesor Ruiz sea de estas últimas.

\* \* \*

La segunda objeción que nosotros hacemos se refiere a la discusión matemática de la ecuación que representa las curvas meridianas. Ya hemos dicho

cómo se deduce esta ecuación de la expresión (5) haciendo en ella  $z = 0$ . Así se obtiene:

$$\frac{kM}{\sqrt{x^2 + y^2}} + \omega^2 x^2 = C = \frac{kM}{b} \quad (7)$$

El Profesor Ruiz le da a esta expresión en su conferencia un alcance exagerado basándose en las seis soluciones que aparenta tener, las cuales serían otros tantos puntos de cruce de la curva o curvas representadas por la ecuación con el eje de las  $X$ . Pensó así que de dicha ecuación podrían obtenerse, al reemplazar en ella las constantes correspondientes, no sólo la curva meridiana relativa a la tierra, sino otras configuraciones de equilibrio propias de otros planetas, y en particular la del planeta Saturno con su curva meridiana relativa al cuerpo central, y dos curvas meridianas laterales que corresponderían a los anillos. En el escrito que analizamos se restringe este alcance dado a la ecuación, pero se insiste en el error de pensar que la expresión pueda presentar seis soluciones reales en  $x$  todas aceptables desde el punto de vista del problema planteado.

Para realzar el inconveniente apuntado vamos a discutir la ecuación (7) en coordenadas polares. Si hacemos, pues  $POA = \theta$   $OA = \rho$  se tendrá:

$$x = \rho \cos \theta \quad \sqrt{x^2 + y^2} = \rho$$

La ecuación se puede escribir entonces:

$$\frac{kM}{\rho} + \omega^2 \rho^2 \cos^2 \theta = \frac{kM}{b} \quad (8)$$

Esta nueva forma deja ver claramente que las soluciones extrañas serían los valores negativos del radio vector  $\rho$  cuya existencia es imposible desde el punto de vista físico, pues no es de suponer un potencial gravitatorio negativo:  $\frac{kM}{\rho}$  es el potencial gravitatorio o newtoniano.

De la expresión anterior se deducen las fórmulas:

$$\cos \theta = \sqrt{\frac{kM(\rho - b)}{\omega^2 \rho^3 b}} \quad (9)$$

$$\cos \theta = \sqrt{\frac{\omega^2 \rho^3 b - kM(\rho - b)}{\omega^2 \rho^3 b}} \quad (10)$$

Estas fórmulas dejan ver claramente que se debe tener en primer lugar:

$$\rho > b \quad \omega^2 \rho^3 b - kM\rho + kMb > 0$$

Además, si en la ecuación (8) hacemos  $\theta = \frac{\pi}{2}$  se tendrá la ecuación de tercer grado:

$$\rho^3 - \frac{kM}{\omega^2 b} \rho + \frac{kM}{\omega^2} = 0 \quad (11)$$

la que nos dará como raíces los valores de los radios vectores en los puntos donde la curva o curvas representadas por la ecuación cortan el eje de las  $X$ .

$$\text{Hagamos: } -\frac{kM}{\omega^2 b} = p \quad \frac{kM}{\omega^2} = q \quad (12)$$

La ecuación (11) se puede escribir sustituyendo los valores anteriores:

$$q^3 + pq + q = 0 \quad (13)$$

Según el teorema de Descartes esta ecuación tendrá siempre una raíz negativa y sólo una. Ahora bien, como esta raíz es inaceptable, la realidad de las otras raíces está sujeta a la condición:

$$4p^3 + 27q^2 < 0 \quad (14)$$

Pero se tiene según las igualdades (12):

$$4p^3 + 27q^2 = \left(\frac{kM}{\omega^2}\right)^2 \left(27 - 4\frac{kM}{\omega^2 b^3}\right)$$

Luego si hacemos  $\frac{4kM}{\omega^2 b^3} = 27P$  la desigualdad

$$(14) \text{ quedaría: } 27\left(\frac{kM}{\omega^2}\right)^2 (1-P) < 0 \quad (15)$$

Para el caso de la tierra, si tenemos en cuenta que  $\omega^2 = \frac{4\pi^2}{T^2}$   $T = 86164$  y  $\frac{kM}{b^2} = g_0$  aceleración de la gravedad en el polo, es fácil com-

probar que  $P > 1$ . Luego la ecuación (13) pertenecería a la clase de las llamadas irreducibles, con una raíz negativa inadmisibile, y dos soluciones reales positivas que pueden obtenerse por medio de las fórmulas conocidas del Algebra superior.

Para continuar la discusión de la expresión (8) en el caso supuesto de la tierra, o sea para  $P$  mayor que la unidad, formemos la expresión de la tangente del ángulo  $\alpha$  que hace  $ON$  con la tangente geométrica a la curva en el punto  $A$  (fig. 1). Se tiene:

$$\tan \alpha = q \frac{d\theta}{dq} = \frac{3kM(b - \frac{2}{3}q)}{2\sqrt{kM(q-b)}[\omega^2 b q^3 - kM(q-b)]} \quad (16)$$

Si llamamos  $q_1$  y  $q_2$  las dos raíces positivas de la ecuación (11) o (13), y suponemos  $q_2 > q_1$  según la teoría de las ecuaciones, se puede escribir inmediatamente el cuadro siguiente de resultados (fig. 2):

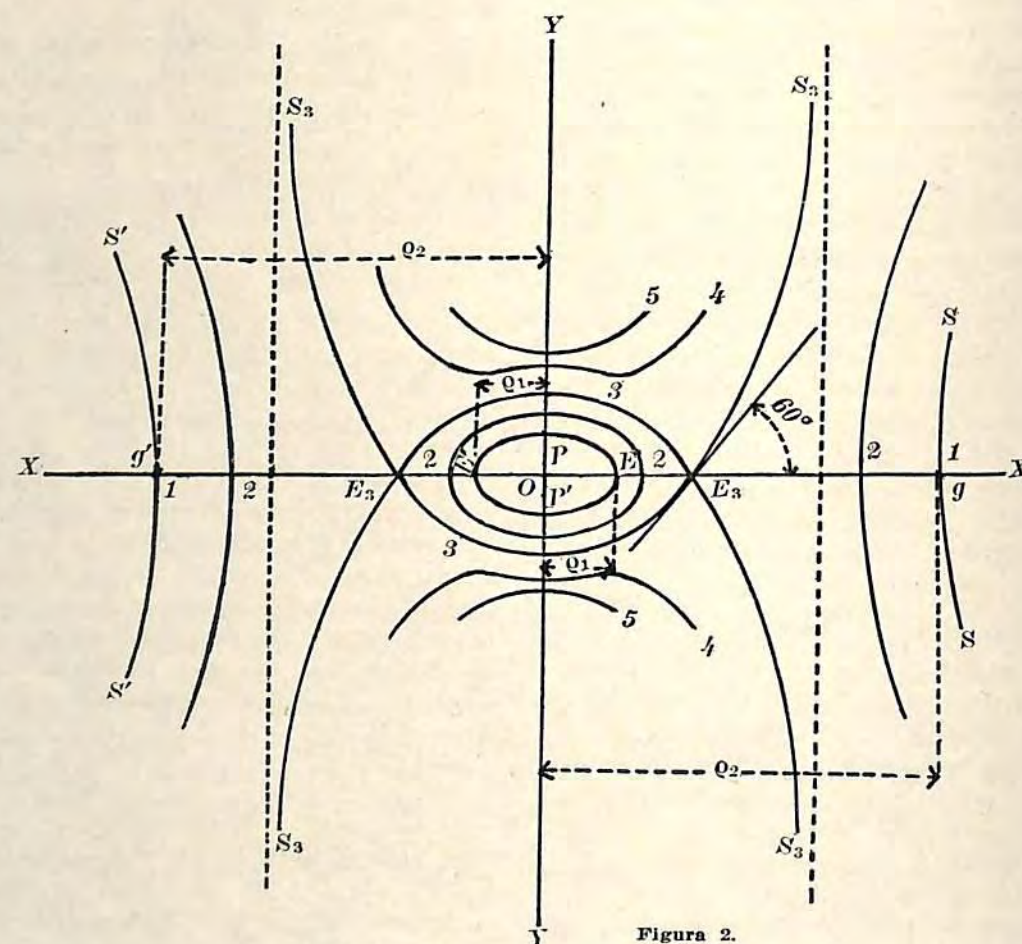


Figura 2.

$0 < q < b$  Inadmisibile según las fórmulas (9)  
 $q = b$  Ecuación (11)  $> 0$  Punto  $P$  de la curva. (o  $P'$ ).  
 $b < q < q_1$  Ecuación (11)  $> 0$  Puntos en una de las cuatro ramas  $PE$ .  
 $q = q_1$  Ecuación (11)  $= 0$  Punto  $E$  de la curva. (o  $E'$ ).

$q_1 < q < q_2$  Ecuación (11)  $< 0$  Inadmisibile según (10). No hay curva.  
 $q = q_2$  Ecuación (11)  $= 0$  Punto  $g$  o  $g'$  de las ramas infinitas  $gS$ .  
 $q_2 < q$  Ecuación (11)  $> 0$  Puntos en estas mismas ramas infinitas.

Se desprende del cuadro anterior que para el caso de la tierra, por ejemplo,  $q$  estará comprendido solamente entre  $b$  y  $q_1$  caso en que se obtendrá la curva cerrada  $PEP'E'$ , o entre  $q_2$  y un valor cualquiera mayor que éste, caso en que se obtendrán las dos ramas infinitas  $gS$ . Para cualquier valor de  $q$  comprendido entre estos límites se tendrá un valor perfectamente determinado de  $\theta$  deducido de una de las fórmulas (9) o (10). Recíprocamente, para cualquier valor del ángulo  $\theta$  comprendido entre  $0$  y  $360^\circ$ , se puede deducir uno determinado de  $q$  por medio de la ecuación de tercer grado, que resultaría de la fórmula (8), cuyas características son idénticas a las de la ecuación (11), puesto que sus coeficientes  $p$  y  $q$  solamente quedarían divididos por un mismo número, lo cual no alteraría el sentido de la desigualdad (14).

Para el radio vector igual a la raíz superior  $q_2$  el ángulo  $\theta$  se hace nuevamente igual a  $\frac{\pi}{2}$  y  $\tan \alpha = \infty$ , lo que indica que la tangente en  $g$  a la rama infinita es vertical; pero esta curva ya no es cerrada, pues su radio vector admite todos los valores posibles hasta el infinito. Se trata, por consiguiente, de una curva abierta, cuyas ramas se extienden simétricamente a un lado y otro del eje  $OX$ , pero cuya abscisa  $x$  tiene un valor límite para  $q = \infty$  igual a  $\sqrt{\frac{kM}{\omega^2 b}}$ . Es decir, una asíntota que no está dibujada en la figura para las líneas  $gS$ . Por no ser aceptables las soluciones negativas del problema, hemos prescindido de señalar en la figura 2 estas líneas, pero se puede comprobar que ocuparían posiciones simétricas a cada curva  $gS$  con relación a su respectiva asíntota que es común.

Se puede asegurar que estas ramas  $gS$  presentan un punto de inflexión. Esto quiere decir que la curvatura de dichas ramas no estará siempre dirigida en el sentido indicado por la figura.

Si admitimos ahora que los coeficientes  $p$  y  $q$  puedan variar; es decir, si admitimos que la ecuación (11) pueda aplicarse a otras masas en rotación diferentes de la de la tierra, la constante  $P$  variará también, y sería preciso estudiar la modificación que sufrirían las curvas en consonancia con dicha variación. Se comprende que si  $P$  variara manteniéndose superior a la unidad, la disposición de las curvas sigue siendo la misma de la figura 2, aunque es de notar que para una disminución de  $P$  la curva central se dilata hasta 2, y las ramas infinitas se aproximan a 2 también.

Si suponemos que  $P$  llegue a ser igual a la unidad, la ecuación (11) o (13) presentará una raíz doble además de la negativa que es inaceptable. Sabido es también que en este caso las raíces son comensurables, y en cuanto a la raíz doble tendrá por valor:

$$q_1 = q_2 = \frac{3}{2}b$$

En este caso las curvas toman la posición marcada con 3 en el dibujo. Como se ve, la curva central se ha ampliado hasta unirse con las ramas laterales, las que se han aproximado hasta formar con la central una sola curva continua. En el punto de unión  $E_3$  las tangentes son comunes y el ángulo  $\alpha$  dado por la fórmula (16) es de  $60^\circ$ . Sobre las ramas  $E_3 S_3$  el radio vector puede continuar creciendo indefinidamente, como lo demuestran las fórmulas (9) y (10) aplicadas al caso. Las ramas infinitas  $E_3 S_3$  tienen una asíntota paralela al eje  $OY$  situada a la distancia  $\frac{3}{2}b\sqrt{3}$  tomada a partir de  $O$  sobre el eje  $X$ , según se deduce de la fórmula (9).

Vale la pena observar que la condición  $P = 1$  significa mecánicamente

$$\frac{kM}{\omega^2 b^3} = \frac{27}{4} = \frac{gq^2}{\omega^2 b^3} \quad \text{O sea: } g = 2\omega^2 q$$

Es decir, si se hubiera adoptado la verdadera fuerza centrífuga, la curva obtenida marcaría el límite a partir del cual comienza a predominar la fuerza centrífuga sobre la gravedad. Este límite ha sido llamado: límite de Roche (5). En nuestro caso, dada la expresión singular admitida para dicha fuerza centrífuga, encontramos naturalmente que en este punto tal fuerza sería la mitad de la acción gravífica.

Podría suponerse, en fin, que  $P < 1$ , mas este caso ofrece poco interés, ya que las curvas correspondientes, señaladas en la figura con los números 4 y 5, no cortan el eje  $X$ . Las soluciones de la ecuación, desde el punto de vista de la coordenada  $x$ , serían imaginarias.

Se desprende de la discusión anterior que la expresión obtenida (7) no presenta para los casos de solución real, sino cuatro raíces aceptables desde el punto de vista de la intersección de la curva o curvas representadas por dicha expresión con el eje  $X$ . Así, pues, no hay la posibilidad señalada por el Profesor Ruiz, de seis raíces, y por tanto, no puede deducirse la existencia de curvas meridianas cerradas laterales, o dispuestas en forma tal que expliquen los famosos anillos del planeta Saturno.

\* \* \*

Nuestra tercera objeción se refiere a las concordanancias numéricas que presenta el Profesor Ruiz Wilches al final de su escrito, como comprobación de su teoría. No nos parece, en efecto, que la fórmula que él somete al cálculo tenga el alcance que él le atribuye, ni que los resultados numéricos sean tan convincentes como él lo piensa.

La expresión comprobada numéricamente por el Profesor Ruiz es la misma (11) de este escrito, más en lugar de resolverla directamente, una vez sustituidas las constantes correspondientes, despeja de ella el valor de  $b$  radio polar, y supone conocido el radio ecuatorial  $a$  el que toma igual numérica-

(5) Véanse las obras citadas de Tisserand, Roche y Poincaré.

mente al del elipsoide de *Clarke* (1880). Así ob- tiene:

$$b = \frac{a}{1 + \frac{\omega^2 a^3}{kM}} \quad (17)$$

Mas para resolver esta expresión numéricamente caben dos alternativas: o determinamos a  $kM$  a partir del dato experimental de  $g$  en el ecuador, o lo determinamos a partir del valor de  $g_0$  obtenido para el polo por medio de la fórmula de *Helmert*. En el primer caso se tendría para la expresión de  $b$

$$b = \frac{a}{1 + \frac{4\pi^2 a}{gT^2}} \quad (18)$$

y en el segundo:

$$b = \frac{a}{1 + \frac{4\pi^2 a^3}{g_0 T^2 b^2}} \quad (19)$$

Se comprende que no es indiferente el empleo de cualquiera de las fórmulas anteriores para la determinación de  $b$ ; porque la (18) corresponde a la hipótesis de radio ecuatorial  $a$  conocido, y valor de  $g$  elegido en concordancia por la igualdad:  $kM = a^2 g$ . Mientras que la (19) ha sido deducida suponiendo conocido el radio polar  $b$ , y el de  $g_0$  de acuerdo por la igualdad correspondiente:  $kM = g_0 b^2$ . Además, como  $b$  sigue figurando en el denominador, en rigor habría que determinarlo por medio de una ecuación de segundo grado.

El resumen de nuestros cálculos con ambas fórmulas sería el siguiente:

Fórmula (18):

|                                                                |                |
|----------------------------------------------------------------|----------------|
| Valor de $b$ en el elipsoide de Clarke: .....                  | 6356515 metros |
| Valor de $b$ deducido de la fórmula haciendo en ella $g=9,848$ |                |
| y $a = 6378249$ (Clarke): ...                                  | 6356358 metros |
| Diferencia:                                                    | 157 metros     |

O sea, un resultado casi igual al del doctor Ruiz pero con la condición de corregir el  $g$  ecuatorial con una fuerza centrífuga doble de la ordinaria. Nótese que el valor introducido es superior al  $g$  polar, el cual tendría que ser modificado en consecuencia.

Fórmula (19):

|                                                                                                                                                        |                |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------------|
| Valor de $a$ en el elipsoide de Clarke: .....                                                                                                          | 6378249 metros |
| Valor de $a$ deducido de la fórmula (raíz de la ecuación (11)) haciendo $g_0 = 9,832$ y $b$ igual al radio polar del elipsoide de Clarke: 6356515: ... | 6378596 metros |
| Diferencia:                                                                                                                                            | 347 metros     |

Se deduce de los cálculos anteriores que la expresión encontrada no representa de ninguna manera, con la exactitud que supone el Profesor Ruiz, el elipsoide de Clarke, ni ningún otro; porque si partimos del radio ecuatorial correspondiente, ob-

tenemos un radio polar más corto; y si, recíprocamente, partimos del radio polar de Clarke, y del  $g_0$  polar correspondiente, llegamos a un valor del radio ecuatorial exagerado, el cual no es otra cosa que la menor raíz positiva de la ecuación (11), la que hemos designado en la discusión anterior con el símbolo:  $q_1$ .

Para disminuir la mayor discrepancia que presenta la fórmula (19), quedaría el recurso de darle más crédito al  $g$  ecuatorial antes empleado y modificar en consecuencia el  $g_0$  polar, a fin de conservar constante el factor  $kM$ . Creemos que así ha procedido el doctor Ruiz, basado en el hecho de que nadie ha medido el  $g_0$  polar directamente, y de que no sería lógico suponer dicho factor  $kM$  variable, ya que la masa de la tierra, por grande que ella sea, y difícil de medir, no es una magnitud elástica. Sin embargo, habría que prescindir de la fórmula de *Helmert* tan laboriosamente establecida. (1).

Dejando de lado estas comprobaciones numéricas, y aun admitiendo que ellas pudieran ser mayores, creemos en fin que la expresión tan discutida tampoco tiene el alcance que se le atribuye en la 2ª de las conclusiones o razones justificativas de su cálculo dadas por el Profesor Ruiz. La expresión (7) u (8) no representa en efecto la forma del geoide, ni el profesor lo demuestra, puesto que sólo establece algunas concordancias con el elipsoide de Clarke o con el de Hayford, pero, él mismo lo sabe mejor que nadie, que ninguno de estos elipsoides es el geoide propiamente dicho, cuya superficie definida por modo empírico, es imposible representar por medio de una expresión matemática explícita. Y decimos explícita, porque, en rigor, la expresión (3) lo representaría; más, en la práctica, esta expresión no ha podido hacerse explícita.

La razón del remoto parentesco que se nota con los elipsoides de referencia, reside en el hecho de que la expresión (8) en cuestión, puede asimilarse a un elipsoide si despreciamos ciertas magnitudes relativamente pequeñas. En efecto: ya hemos visto cómo en la curva central,  $q$  varía entre el radio polar  $b$  de 6356515 metros, y la raíz positiva menor  $q_1$  o radio ecuatorial de 6378596 metros. Si llamamos  $d$  la diferencia variable entre el radio vector en un punto cualquiera de la curva y el radio polar, se tiene evidentemente:  $q = b + d$ . Ahora bien: la ecuación (8) se puede escribir (cambiando a  $\theta$  por  $\varphi$ , ángulo con el eje  $ox$ ):

$$\omega^2 \cos^2 \varphi = \frac{kM}{b} \frac{(q-b)}{q^3} = \frac{kM}{b^4} d \left(1 + \frac{d}{b}\right)^{-3}$$

Pero si desarrollamos  $\left(1 + \frac{d}{b}\right)^{-3}$  limitándonos a los términos de primer grado en  $\frac{d}{b}$  se obtiene:

$$\left(1 - 3 \frac{d}{b}\right) \quad \text{Y por tanto:}$$

$$\omega^2 \cos^2 \varphi = \frac{kM}{b^3} \left(\frac{d}{b} - 3 \frac{d^2}{b^2}\right)$$

(1) V. *Helmert*. Géodésie supérieure. Tome II.

Dentro del orden de aproximación que nos hemos impuesto despreciemos a  $(d/b)^2$ . Se tiene entonces:

$$\omega^2 \cos^2 \varphi = \frac{kM}{b^4} d. \quad \text{De donde:} \quad \frac{d}{b} = \frac{\omega^2 b^3}{kM} \cos^2 \varphi$$

Reemplazando este valor en la igualdad establecida antes para  $q$  podemos escribir la siguiente ecuación aproximada del meridiano:

$$q = b \left(1 + \frac{\omega^2 b^3}{kM} \cos^2 \varphi\right) \quad (20)$$

Es sabido, por otra parte, que la ecuación de la elipse se puede escribir también, si despreciamos las potencias superiores de la excentricidad  $e$ :

$$q = b \left(1 + \frac{e^2}{2} \cos^2 \varphi\right) \quad (21)$$

en la que  $e$  es la excentricidad  $\frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}$ . Luego la ecuación aproximada del meridiano obtenida se puede asimilar a una elipse cuya excentricidad será:

$$e = \left(\frac{2\omega^2 b^3}{kM}\right)^{1/2} = \sqrt{\frac{8\pi^2 b}{g_0 T^2}} \quad (22)$$

Ahora bien, esta excentricidad es aproximadamente igual a la del elipsoide de Clarke. Para éste se obtiene en efecto,

$$e = 0,082438$$

y para el elipsoide deducido de la curvatura propuesta:

$$e = 0,082919$$

Esta es, pues, la razón del parentesco próximo o remoto que se nota entre ambas curvas.

Si hubiéramos dejado indeterminada la expresión o ley de la fuerza centrífuga, el mismo cálculo anterior nos habría llevado a la siguiente ecuación:

$$q = b \left(1 + \frac{F}{2kM} b^2 \cos \varphi\right)$$

En que  $F$  es la fuerza centrífuga.

A partir de esta ecuación el problema sería entonces buscar una ley para  $F$  fuerza centrífuga, tal que se tenga:

$$\frac{Fb^2}{2kM} = \frac{e^2}{2} \cos \varphi$$

en que  $e$  es la excentricidad del elipsoide de Clarke o de cualquier otro.

La fuerza centrífuga ad hoc, debería ser:

$$F = e^2 \frac{kM}{b^2} \cos \varphi$$

Efectuando este cálculo en el cual hemos despreciado las potencias superiores de la relación  $\frac{d}{b}$  y a esta misma cantidad enfrente de la unidad, se llega a la conclusión de que la fuerza centrífuga escogida por el Profesor Ruiz es demasiado fuerte. No debiera haber tomado 2 como coeficiente de  $\omega^2 x$  sino 1,9768 (siempre que la aceleración de la gravedad en el polo sea la de *Helmert*).

La afinidad de esta curva, no ya con el elipsoide de Clarke, por las razones vistas, sino con el llamado esferoide de Laplace deducido en su teoría de la forma de los planetas, explica el hallazgo de la relación

$$(1) \quad \Delta T^2 c = \frac{3\pi}{k}$$

que el Profesor Ruiz califica de muy interesante en apoyo de su tesis. (Hemos llamado aquí  $c$  al aplanamiento). Esta relación, en efecto, se puede escribir también:

$$c = \frac{Fe}{g}$$

En la que  $Fe$  = fuerza centrífuga ecuatorial y  $g$  aceleración en el ecuador, y si se admite que  $a$  es igual a  $b$  próximamente. Escrita así tal relación traduce simplemente un conocido teorema demostrado por *Tisserand* en su *Mecánica Celeste*, Tomo II, p. 90, el cual se enuncia así:

“El aplanamiento de la superficie de una masa fluida homogénea e incompresible, que ha alcanzado como forma de equilibrio la de un elipsoide de revolución de aplanamiento muy pequeño, es sensiblemente igual a los 5/4 de la relación entre la fuerza centrífuga ecuatorial y la pesantez correspondiente”.

En el caso presente, dado que no se ha admitido la fuerza centrífuga corriente, se obtiene que el aplanamiento sería igual exactamente a dicha relación. La diferencia es desde luego relativamente pequeña, o sea, lo que va de 1 a 1,25.

\* \* \*

Para terminar podemos resumir las objeciones anteriores de la manera siguiente:

1) No nos parece posible aplicar a la difícil cuestión de investigar la forma del globo terrestre, el mismo criterio o procedimiento aplicado por Laplace, Roche o Poincaré, a la determinación de las superficies de nivel en el equilibrio de una masa gaseosa, compuesta por una condensación central esférica, y una atmósfera muy tenue en su derredor, cuya acción gravífica pudiera despreciarse.

2) La expresión de la fuerza centrífuga empleada en el planteo de las ecuaciones, es inadmisiblesi se pretende, como lo afirma el Profesor Ruiz, resolver la cuestión sin salirse de la Mecánica clásica.

3) La discusión de la expresión matemática obtenida debe realizarse en el sentido de rechazar las soluciones extrañas al problema, y por tanto inadmisibles. Como lo hemos demostrado, las soluciones no son más de cuatro, dos a dos iguales en coordenadas rectangulares, y en los casos que tales soluciones existen o son reales. Los anillos de Saturno no resultan de esta discusión.

4) La expresión obtenida se reduce en primera aproximación a una elipse, que difiere poco del elipsoide de Clarke, debido a la introducción de dicha

(1) Véase Revista de la Universidad. Noviembre, número 4. Página 282.

inusitada fuerza centrífuga. Sin embargo, las concordancias anotadas son exageradas, según nuestros cálculos si se adopta el  $g_0$  polar. De otro modo habría que prescindir de la fórmula de Helmholtz. La similitud de la curva también con el esferoide de Laplace, deducido a partir de la fuerza centrífuga corriente, explica la expresión del aplanamiento encontrada, conforme a un teorema ya conocido de la Mecánica Celeste.

5) Finalmente, aunque las concordancias fueran aún más rigurosas, no sería el caso de asegurar que se ha encontrado la expresión matemática del geoi-

de, o superficie matemática de la tierra, pues dicha superficie no es identificable con la de un elipsoide, ya que unas veces pasa por debajo y otras por encima de las superficies elipsoidales que se han elegido como referencia. La superficie del geoide resulta, pues, ligeramente ondulada respecto de aquellas superficies de referencia, y no parece posible por lo tanto, expresarla o representarla con una expresión matemática extrínseca. Pasamos por alto las dificultades que tendría en la práctica una comprobación de ésta o de cualquiera otra expresión matemática con el propio geoide.

**NOTA DE LA DIRECCION.** — Se publica el estudio crítico anterior sin el escrito original que lo motiva ("Estudio de una posible forma de equilibrio del globo terrestre"), porque su autor, el Profesor Belisario Ruiz Wilches, no accedió a dárnoslo para su inserción en estas páginas, cosa que lamentamos sinceramente, puesto que para el lector será difícil seguir los razonamientos de la crítica sin la fácil comprobación con las ideas del doctor Ruiz Wilches, mediante un cotejo oportuno. Parece que este ilustre Profesor no pudo complacerse por haberse comprometido anteriormente con la Revista de la Universidad Nacional a la cual prometió las primicias de sus valiosos estudios sobre esta materia. Esto no quiere decir, naturalmente, que no nos sea posible obtener permiso para reproducir tan importante trabajo en algún número próximo de nuestra publicación.

Ciertamente, ello será necesario porque la Academia Colombiana de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales ya se ha ocupado del problema planteado por el Profesor Ruiz y ha acogido la presente nota crítica del doctor Carrizosa Valenzuela, cuya opinión coincide exactamente con la nuestra, sin que esto vaya en mengua del mérito sobresaliente del criticado.

Siempre hemos creído que la crítica serena y razonada da realce a los estudios de que se ocupa y que el silencio alrededor de ellos más significa poco aprecio que concesión graciosa a alguna autoridad indiscutible. Los cuerpos científicos, como la Academia Colombiana de Ciencias, tienen en la crítica un deber ineludible que cumplir, pues se dice generalmente que de la discusión sale la luz, e implícitamente están interesados en que los esfuerzos de la investigación no se pierdan o se tuerzan ante la indiferencia colectiva o por razón de la incomprensión de los gobernantes, máxime cuando se trata, como en el presente caso, de excelentes ensayos nacionales.

No está por demás, llamar la atención de nuestro público lector sobre la labor que representa el estudio crítico que comentamos y que presupone gran versación matemática y profundos conocimientos de la literatura científica respectiva. En él no sólo se comenta, se explica y se corrige un trabajo ajeno sino que se exponen los alcances que tiene la investigación sobre la forma posible de equilibrio de la tierra y respecto de los elipsoides convencionales de referencia, haciendo notar de paso, que el problema abocado por el Profesor Ruiz no es de fácil solución.

Excitamos atentamente a este eminente científico a que nos conceda, para la publicación en estas páginas, la réplica que enderece contra las atinadas observaciones del Profesor Carrizosa Valenzuela. Estamos en ello interesadísimo, pues las discusiones de carácter científico han de dar verdadero brillo a esta Revista.

## VOCABULARIO DE TERMINOS VULGARES EN HISTORIA NATURAL COLOMBIANA

HERMANO APOLINAR MARIA

Director-fundador del Museo de Ciencias Naturales del Instituto de La Salle—Bogotá.  
Profesor en el mismo Instituto.

(Continuación).

1960.—*Centella*; *Mismia*; *Yerba de murciélago*.

*Cleome anomala* HBK.—Familia de las *Capparidáceas*.

*Cleome* (del gr. *kleio*, cierro, según algunos; *kleos*, ruido, según otros).

El género comprende unas 90 especies, propias de las regiones cálidas del globo.

*Cl. anomala* vive entre 1500 y 3000 mts. de altura sobre el nivel del mar. Tiene olor fuerte y desagradable; de propiedades rubefacientes bastante pronunciadas, debido a la presencia de un aceite volátil análogo al de la mostaza y que se evapora por la cocción o por la desecación.

Es planta insectífuga; las ramas frescas las esparcen en las habitaciones para ahuyentar o matar las pulgas y las niguas.

1961.—*Centeno*.

*Secale cereale* Lin.—Familia de las *Gramíneas*.

*Segal*: nombre celta de la planta que deriva de *sega*, hoz; de ahí el nombre *seges* (lat.) para indicar plantas que se cortan con la hoz, así como *legumen* indica las que se recogen con la mano.

El género consta de 2 especies, de las regiones del Mediterráneo, del Asia occidental y central. Sin embargo, el origen del tipo cultivado queda incierto; tal como conocemos esta planta hoy, no se ha encontrado sino en estado subespontáneo.

Se cultiva sobre todo en las regiones montañosas y en terrenos pobres en calcáreo y en los países del Norte (Dinamarca, Escandinavia, Rusia).

La harina del centeno da un pan grisáceo y pesado; mezclando las harinas de centeno y trigo se obtiene un pan aceptable cuando está bien preparado.

Los granos sirven mucho en la fabricación de un aguardiente que es llamado *aguardiente de granos*; a veces los emplean en la fabricación de la cerveza, pero el producto es muy inferior a la cerveza de cebada.

El *cornezuelo del centeno* es el grano atacado por un hongo (*Claviceps purpurea*) de color negro, deformado y más largo que el grano sano; tiene un principio especial, la *ergotina*, que es un veneno muy activo; de ahí la necesidad de separar cuidadosamente los granos enfermos cuando se destina el grano del centeno para la fabricación de pan. Su presencia en el alimento produce un envenenamiento que ha sido, más de una vez, mortal.

Tiene aplicaciones en medicina, especialmente como hemostático.

1962.—*Cera-laurel*; *Laurel de cera*; *Olivo de cera*.  
*Myrica arguta* HBK.—Familia de las *Miricáceas*.

El género *Myrica* (del gr. *myrón*, aroma) consta de unas 40 especies, de las regiones templadas y cálidas del globo (menos Australia).

*M. arguta* es un arbusto abundante en las regiones altas de Santander, Cundinamarca, etc. Los frutos exudan una gran cantidad de cera que se extrae por ebullición para fabricar bujías, que se usan mucho en las regiones donde se produce.

1962-bis.—*Cera*.

*Jussiaea pilosa* HBK.—Familia de las *Oenoteráceas*.

Género dedicado a Antoine-Laurent de Jussieu; y consta de unas 40 especies, propias de los trópicos del globo.

*J. pilosa* es una especie encontrada por el Prof. J. Cuatrecasas en un islote de las bocas del río Regla. Río Magdalena.

1963.—*Cerdita* (Cundinamarca).

*Pipra filicauda* Spix (= *Cirrihippra*).—Familia *Pipridae*.

Spix describió la especie sobre un ejemplar procedente del Brasil ("ad pagum St. Pauli in sylvis fl. Solimoes").

Chapman en su obra "Distribution of Bird-Life in Colombia" señala a "La Morelia" y Florencia (Llanos orientales) como puntos donde observó la especie: cogió 2 ejemplares en "La Morelia" y 1 en Florencia.

1964.—*Cerdo montés* (Véase N° 847).

1965.—*Cerecito de monte*; *Chantre* (Popayán); *Mandul*.

*Freziera sericea* H. et B.—Familia de las *Ternstroemiáceas*.

El género *Freziera* (dedicado al botánico francés Amédée Frézier) consta de media docena de especies, propias de la América tropical.

Otros nombres: *Fr. chrysophylla* H. et B.; *Fr. hirsuta* Seem.

Las plantas descritas como *Fr. chrysophylla* e *hirsuta* constituyen, según Triana y Planchon, una variedad (var. *chrysophylla* Tr. et Pl.).

*Fr. sericea* es un árbol de unos 6 mts. de altura por 0.40 mts. de diámetro. La madera, de regulares peso y dureza, sirve en las construcciones y como material combustible. Las frutas son comestibles.

La especie es común entre Popayán y Quito, 2100 y 3500 mts. sobre el nivel del mar. La variedad