# ESTUDIO DE LA PROYECCION SINUSOIDAL PARA EL MAPA DE COLOMBIA

**DARIO ROZO M.**
Director del Instituto Geográfico Militar y Catastral

### *MOTIVO*

La proyección llamada de Sanson, de Flamsteed o sinusoidal, conserva la equivalencia de las áreas y parece muy conveniente para las regiones ecuatoriales, porque en ellas, para zonas angostas (unos 15°), las deformaciones relativas a grandes alineamientos, son muy pequeñas. Estas son las razones que han determinado el presente estudio, el cual permitirá poder comparar este sistema de proyección con el de Gauss transverso, elegido en Colombia para las cartas militares y catastrales.

### *GENERALIDADES SOBRE LA TEORIA*

Fundamentos—Se supondrá, en primer lugar, que la superficie del *elipsoide* terrestre está dividida por meridianos y paralelos: $ds$ designará un elemento lineal sobre la superficie del elipsoide; $d\sigma$ el elemento sobre el plano, correspondiente a $ds$.
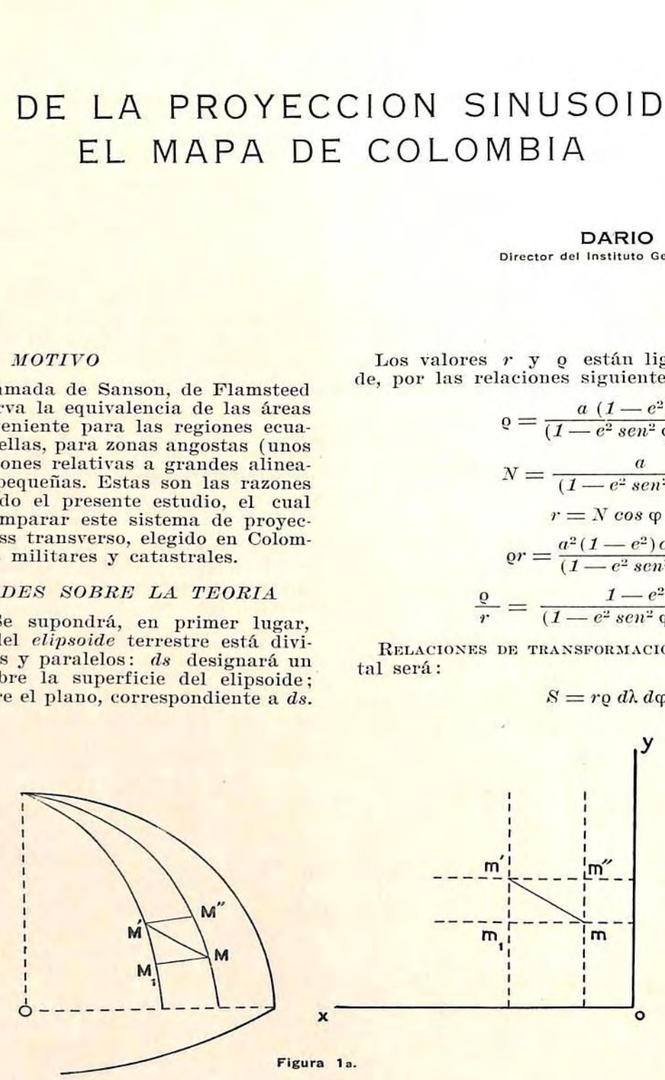
Figura 1a.

φ latitud λ longitud

$$x = f(\varphi, \lambda) \qquad y = F(\varphi, \lambda) \qquad (1)$$

Se supondrá también que el elipsoide es de revolución, como está generalmente admitido.

El elemento $ds$ tendrá sobre el paralelo una componente $ds_1$ y sobre el meridiano una componente $ds_2$ que son rectangulares. Como $ds$ es un elemento infinitesimal se puede escribir:

$$ds^2 = ds_1^2 + ds_2^2 \qquad (2)$$

Haciendo intervenir los elementos del elipsoide y llamando $r$ el radio del paralelo en $M$ y $\varrho$ el radio de curvatura del meridiano en $M$ se tiene:

$$ds_1 = r\,d\lambda \qquad ds_2 = \varrho\,d\varphi \qquad (3)$$

Los valores $r$ y $\varrho$ están ligados, en el elipsoide, por las relaciones siguientes:

$$\varrho = \frac{a\,(1-e^2)}{(1-e^2\,sen^2\,\varphi)^{3/2}}$$

$$N = \frac{a}{(1-e^2\,sen^2\,\varphi)^{1/2}}$$

$$r = N\,cos\,\varphi \qquad (4)$$

$$\varrho r = \frac{a^2(1-e^2)\,cos\,\varphi}{(1-e^2\,sen^2\,\varphi)^2}$$

$$\frac{\varrho}{r} = \frac{1-e^2}{(1-e^2\,sen^2\,\varphi)\,cos\,\varphi}$$

Relaciones de transformacion—El área elemental será:

$$S = r\varrho\,d\lambda\,d\varphi \qquad (5)$$

Se puede hacer un cambio de variable que facilite el desarrollo de las fórmulas; en efecto, se tiene:

$$\varrho = r f_r(\varphi)$$

Por consiguiente resulta $S = r^2\,d\lambda\,f_r(\varphi)\,d\varphi$

Si se hace $f_r(\varphi)\,d\varphi = dL$ se tendrá:

$$d\varphi = \frac{r}{\varrho}\,dL \qquad \text{O sea} \qquad dL = \frac{\varrho}{r}\,d\varphi \qquad (6)$$

$$S = r^2\,d\lambda\,dL \qquad (7)$$

A esta superficie *elemental* sobre el elipsoide corresponderá un elemento de superficie en el plano, elemento cuya expresión será:

$$\Sigma = f_s(d\sigma_1, d\sigma_2) \qquad (8)$$



Escribamos: $x = x(L, \lambda) \qquad y = y(L, \lambda) \qquad (9)$

Y se tendrá:

$$dx = \frac{\partial x}{\partial L}\,dL + \frac{\partial x}{\partial \lambda}\,d\lambda \qquad dy = \frac{\partial y}{\partial L}\,dL + \frac{\partial y}{\partial \lambda}\,d\lambda$$

Ahora, para abreviar la escritura, hagamos:

$$\frac{\partial x}{\partial L} = v \quad \frac{\partial x}{\partial \lambda} = g \qquad \frac{\partial y}{\partial L} = p \quad \frac{\partial y}{\partial \lambda} = q \qquad (10)$$

$$dx = v\,dL + g\,d\lambda \qquad dy = p\,dL + q\,d\lambda \qquad (11)$$

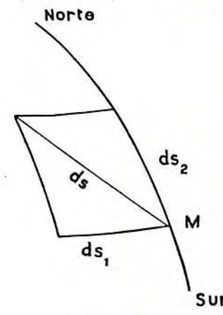


Figura 2a.

Hay que notar que los ejes $x$ e $y$ no corresponden a los meridianos y paralelos; es por consiguiente necesario buscar las relaciones que ligan a $ds$ y $d\sigma$ teniendo en cuenta sus respectivas orientaciones.

Se tiene según las ecuaciones (6) y (3):

$$\varrho = \frac{dL}{d\varphi} \qquad \varrho\,d\varphi = r\,dL$$

$$ds_1 = r\,d\lambda \qquad ds_2 = r\,dL$$

En consecuencia los elementos lineales darán:

Para el elipsoide:

$$ds^2 = r^2\,dL^2 + r^2 d\lambda^2$$

cuyas componentes son:

$rdL$ lo que implica $d\lambda = o$

$rd\lambda$ lo que implica $dL = o$

Para el plano:

$$d\sigma^2 = dx^2 + dy^2$$

$$d\sigma^2 = (v\,dL + g\,d\lambda)^2 + (p\,dL + q\,d\lambda)^2$$

cuyas componentes serán:

$$dx = v\,dL \quad (\text{pues } d\lambda = o) \qquad (12)$$

$$dy = q\,d\lambda \quad (\text{pues } dL = o)$$

En el elipsoide $ds$ tiene dos componentes rectangulares: $rdL$ y $rdL$

Esto indica que la primera componente puede obtenerse haciendo $d\lambda = o$ en el valor de $ds^2$, lo cual traduce el comportamiento de $ds$ con respecto a su componente. Análogamente la segunda componente implica $dL = o$. En consecuencia, la componente de $d\sigma$ correspondiente a $rdL$ se obtiene haciendo en la expresión de $d\sigma^2$, $d\lambda = o$; y llamándola $C_1$

$$d\sigma_1^2 = (v\,dL)^2 + (p\,dL)^2 = C_1^2 \qquad (13)$$

Pero $vdL$ corresponde a la componente sobre el eje de las $x$ y $pdL$ a la componente sobre el eje de las $y$. En consecuencia la transformada de la componente $rdL$ hace un cierto ángulo con los ejes coordenados $x$ $y$. El ángulo con el eje de las $y$ estará definido por

$$tang.\,\theta = \frac{v\,dL}{p\,dL} = \frac{v}{p} \qquad (14)$$

La otra componente de $d\sigma$ que llamaremos $C_2$ se obtiene haciendo

$dL = o$ en $d\sigma^2$ O sea $C_2^2 = g\,d\lambda^2 + q\,d\lambda^2$

y corresponderá en el elipsoide a $rd\lambda$. O sea a la componente sobre el paralelo. Pero en las (11) al hacer $dL = o$ resulta $dx = gd\lambda$ ∴ $dy = qd\lambda$. De modo que $C_2$ hace con el eje $x$ el ángulo $\theta'$ definido por $tang.\,\theta' = \frac{q}{g}$.

Transformacion de angulos—Llamando $\omega$ el ángulo que formar las dos direcciones de las componentes de $d\sigma$, se tendrá:

$$\theta + \omega + \theta' = 90°$$

El valor de $\omega$ se puede obtener del modo siguiente:

$$\theta + \theta' = 90° - \omega$$

$$tang.(\theta + \theta') = \frac{tang.\,\theta + tang.\,\theta'}{1 - tang.\theta\ tang.\,\theta'} = cotg\,\omega$$

$$cotg\,\omega = \frac{\frac{v}{p} + \frac{q}{g}}{1 - \frac{vq}{gp}} = \frac{vg + pq}{pg - vq} = \frac{E}{J}$$

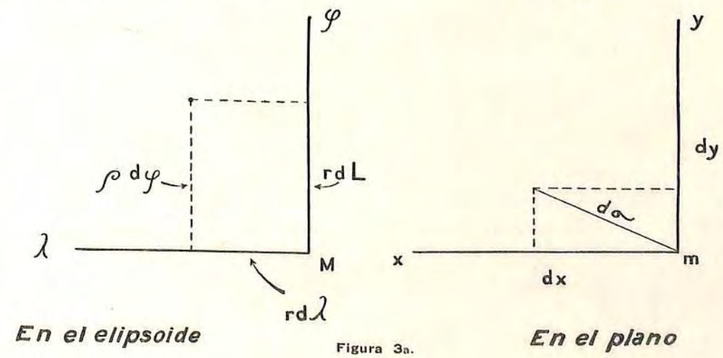


Figura 3a.

O sea $tang.\ \omega = \frac{J}{E}$ Y contando los ángulos en el sentido de las agujas de un reloj:

$$tang.\ \omega = -\frac{J}{E} \qquad (16)$$

Los valores $J$ y $E$ proceden de las siguientes convenciones:

$$\begin{aligned} D &= v^2 + p^2 \\ E &= vg + pq \\ F &= g^2 + q^2 \\ J &= pg - vq \end{aligned} \qquad (17)$$

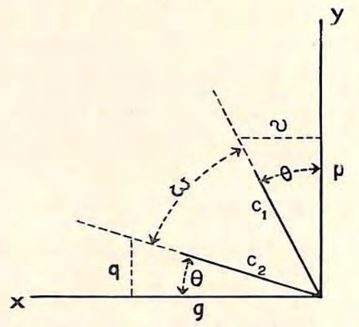


Figura 4a.

El valor de $J$ es función de las tres primeras igualdades (17). En efecto:

$$\begin{aligned} &DF = v^2 g^2 + v^2 q^2 + p^2 g^2 + p^2 q^2 \\ &E = v^2 g^2 + p^2 q^2 + 2\, vg\, pq \qquad (18) \\ &DF - E^2 = v^2 q^2 + p^2 g^2 - 2\, vg\, pq = (pg - vq)^2 = J^2 \end{aligned}$$

De $cotg\,\omega$ resultan los siguientes valores:

$$tang\,\omega = \frac{J}{E} \qquad \therefore \qquad tang^2\,\omega = \frac{DF}{E^2} - 1$$

$$tang^2\,\omega + 1 = \frac{DF}{E^2} \qquad (19)$$

$$cos^2\,\omega = \frac{1}{1 + tang.^2\,\omega} = \frac{E^2}{DF} \qquad sen^2\,\omega = 1 - \frac{E^2}{DF}$$

$$cos\,\omega = \frac{E}{\sqrt{DF}} = \frac{E}{\sqrt{E^2 + J^2}} \qquad (20)$$

$$sen\,\omega = \frac{\sqrt{DF - E^2}}{\sqrt{DF}} = \frac{J}{\sqrt{DF}} \qquad (21)$$

El ángulo $\omega$ es el ángulo que en el plano forman entre sí las transformadas de las dos componentes rectangulares de una línea $ds$ sobre el elipsoide, y cuando éstas están sobre las direcciones de los meridianos y de los paralelos.

Conviene averiguar el ángulo transformado de un ángulo dado, cualesquiera que sean las direcciones de los dos lados del ángulo dado.

Se tiene en general, sobre el elipsoide:

$$tang.\ z = \frac{rd\lambda}{\varrho d\varrho} = \frac{rd\lambda}{rdL} = \frac{d\lambda}{dL} = u \qquad (22)$$

Y sobre el plano,

$$tang.\ \alpha = \frac{dx}{dy} \qquad (23)$$

Sustituyendo los valores $dx$ $dy$ y dividiendo numerador y denominador por $dL$ para obtener $tang.\ \alpha$ en función de $u$, se encuentra:

$$tang.\alpha = \frac{v + gu}{p + qu} \qquad (24) \qquad tang.\ \alpha = \frac{v\frac{1}{u} + g}{p\frac{1}{u} + q} \qquad (25)$$

El ángulo $\alpha$ es pues el transformado de un azimut $z$ cuya tangente es $u$: azimut contado del norte hacia el oeste.

Ahora sean dos direcciones en el globo terrestre de azimutes $z_1$ y $z_2$ contados a partir de las $\varphi$ positivas hacia el oeste, y sean $\alpha_1$ y $\alpha_2$ las respectivas direcciones transformadas. El ángulo $\alpha_2 - \alpha_1$ será el ángulo transformado correspondiente al ángulo $z_2 - z_1$.

Sea $\qquad z_2 - z_1 = A \qquad \alpha_2 - \alpha_1 = B \qquad (26)$

Se tendrá $\qquad tang.\ B = \frac{tang.\ \alpha_2 - tang.\ \alpha_1}{1 + tang.\ \alpha_2\ tang.\ \alpha_1} \qquad (27)$

El numerador de esta relación es:

$$tang.\alpha_2 - tang.\ \alpha_1 = \frac{v + g}{p + qu_2} - \frac{v + gu_1}{p + qu_2} = \frac{(u_1 - u_2)\ (v^2 - gp)}{(p + qu_2)\ (p + qu_1)} = \frac{(u_1 - u_2)\ J}{m\ n}$$

El denominador será:

$$1 + tang.\ \alpha_2\ tang.\ \alpha_1 = 1 + \frac{(v + g\,u_1)\ (v + g\,u_2)}{m\ n} = 1 + \frac{v^2 + vg\ (u_1 + u_2) + g^2\,u_1\,u_2}{m\ n}$$

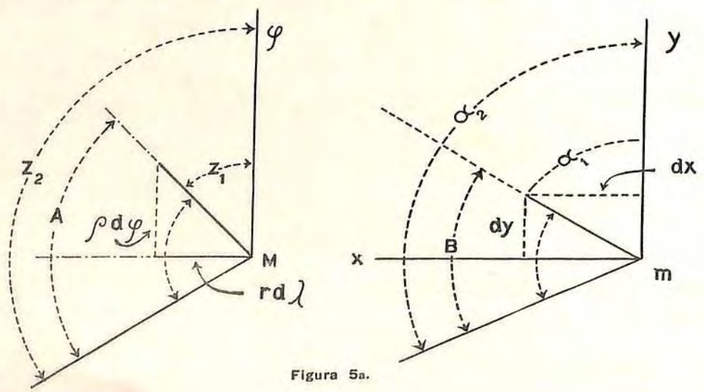


Figura 5a.



El producto $\quad m\ n = p^2 + pq\ (u_1 + u_2) + q_2\,u_1\,u_2$

Por consiguiente: $\qquad 1 + tang.\ \alpha_2\ tang.\ \alpha_1 = \frac{p^2 + v^2 + (q^2 + g^2)\ u_1\,u_2 + (vg + pq)\ (u_1 + u_2)}{m\ n}$

$$= \frac{D + F\,u_1\,u_2 + E\ (u_1 + u_2)}{m\ n}$$

En consecuencia:

$$tang.\ B = \frac{(u_1 - u_2)}{D + u_1\,u_2\,F + (u_1 + u_2)\ E} \qquad (28)$$

que es la fórmula del ángulo $B$, siendo $B$ el ángulo transformado de $A$, estando dado $A$ por $A = z_2 - z_1$ Y siendo $\quad u_2 = tang.\ z_2\ .\ .\ u_1 = tang.\ z_1$

debe tenerse $\qquad tang.A = \frac{u_2 - u_1}{1 + u_2\,u_1} \qquad (29)$

La fórmula (28) puede modificarse de modo que defina el ángulo transformado de un ángulo recto tomado sobre el elipsoide en cualquier orientación.

En efecto, si $\quad z_2 - z_1 = 90° \qquad u_2 = -\frac{1}{u_1}$

Sustituyendo este valor en la (28), se encuentra:

$$tang.\ B_r = \frac{(1 + u_1^2)\ J}{u_1\ (D - F) + (u_1^2 - 1)\ E} \qquad (30)$$

Si la primera dirección es la del meridiano $B_1 = o$ Y llamando $\beta$ el valor correspondiente de $B_2$ se halla

$$tang.\ \beta = -\frac{J}{E} \qquad (32)$$

igual al valor (16) que corresponde al ángulo de dos componentes según el meridiano y el paralelo, como debía ser.

La fórmula (30) permite calcular la deformación máxima o mínima de un ángulo recto al quedar representado en el mapa. Lo cual se hace tomando por variable a $u_1$ Es decir, tomando distintas orientaciones del primer lado del ángulo recto y haciendo $\quad \frac{d\,B}{d\,u_1} = o$

Procediendo así, resulta:

$(D - F)\,(1 - u_1^2) + 4\,Eu_1 = o.$ Si $\quad D - F = P$

$$u_1^2 - \frac{E}{P}\,u_1 - 1 = o$$

Sean $u'_1$ y $u''_1$ los valores de $u_1$ dados por esta ecuación; entonces:

$$u'_1 + u''_1 = 4\,\frac{E}{P} \qquad u'_1\,u_1'' = -1$$

$$u'_1 = 2\,\frac{E}{P} + \frac{1}{P}\sqrt{4\,E^2 + P^2}$$

$$u''_1 = 2\,\frac{E}{P} - \frac{1}{P}\sqrt{4\,E^2 + P^2}$$

La segunda derivada es $\quad B''_r = 2\,u_1 - 4\,\frac{E}{P}$ que indica que el crecimiento o decrecimiento del ángulo transformado cambia de signo cuando $u_1 = 2\,\frac{E}{P}$ De modo que $u'_1$ corresponde al máximo y $u''_1$ al mínimo.

Transformacion de angulos.

$$T = \frac{tg\,A}{tg\,B} = \frac{(u_2 - u_1)\,[D + u_1\,u_2\,F + (u_1 + u_2)\,E]}{(1 + u_2\,u_1)\ (u_1 - u_2)\,J}$$

Transformacion de distancias.—La relación de magnitud entre las distancias tomadas sobre el elipsoide y las correspondientes distancias sobre el plano, o sea sobre el mapa, se obtiene así, designándola con $\tau$ (Ver ecuaciones (12) y (21):

$$\tau = \frac{d\sigma}{ds} = \sqrt{\frac{(dx)^2 + (dy)^2}{(ds_1)^2 + (ds_2)^2}} \qquad (34)$$

$$ds_1 = rd\lambda \qquad ds_2 = rdL$$

$$dx = u\,dL + g\,d\lambda \qquad dy = p\,dL + q\,d\lambda$$

$$dx^2 + dy^2 = v^2\,dL^2 + g^2\,d\lambda^2 + p^2\,dL^2 + q^2\,d\lambda^2 + 2\,vg\,dL\,d\lambda + 2\,pq\,dL\,d\lambda = D\,dL^2 + F\,d\lambda^2 + 2\,E\,dL\,d\lambda$$

$$ds_1^2 + ds_2^2 = r^2\,(d\lambda^2 + dL^2)$$

$$\tau = \frac{\sqrt{D dL^2 + F\,d\lambda^2 + 2E\,dL\,d\lambda}}{r\sqrt{dL^2 + d\lambda^2}}$$

Y teniendo en cuenta la (22) o sea que

$$\frac{d\lambda}{dL}\,tang.z = u \quad \text{se halla:}$$

$$\tau = \frac{\sqrt{D + 2\,Eu + Fu^2}}{r\sqrt{1 + u^2}}$$

Así, pues, la relación de distancias depende generalmente de la orientación; por ejemplo, para los lugares a lo largo de los paralelos, $u$ corresponde a tangente de 90° o sea a $dL = o$ y entonces la ecuación (35) da:

$$\tau = \frac{\sqrt{F}}{r} \qquad (37)$$

La relación de distancias sobre el paralelo dependerá pues del valor que se adopte para $F$ con relación a $r$.

En la dirección de los meridianos se tendrá

$$u = o \qquad \tau = \frac{\sqrt{D}}{r} \qquad (38)$$

Y por tanto, la relación de distancias tomadas sobre un meridiano dependerá de la función que se adopte para $D$ y del valor de $r$.

$\tau$ es independiente de la dirección cuando

$$D = F \qquad \text{y} \qquad E = o.$$

De la ecuación (36) se deduce que haciendo

$$\frac{d\tau}{du} = o \quad \text{resulta:}$$

$$u\,(D - F) + (u^2 - 1)\,E = o \qquad (39)$$

Ecuación que escrita en otra forma es

$$u^2 + \frac{P}{E}\,u - 1 = o \qquad (40)$$

cuyas raíces $u_1$ y $u_2$ dan $u_1\,u_2 = -1.$ Lo que indica que hay dos direcciones normales entre sí; a una de ellas corresponde el máximo de $\tau$ y a la otra el mínimo.

La ecuación (39) tiene la misma forma del denominador de la (30) que expresa la tangente de un ángulo recto transformado; el valor (39) hace infinito el valor de $tang.B_r$ lo que indica que $B_r = 90°$. O sea que el ángulo recto de las dos direcciones en que $\tau$ es máximo y mínimo, tiene por transformado *otro ángulo recto.*

*Nota*—Obsérvese que la relación de distancias y la escala, son cosas muy diferentes.

Elipse indicatriz.—Recuérdese que las magnitudes aquí consideradas son infinitesimales. Esto aclarado, supongamos un plano tangente al elipsoide en un punto dado cualquiera; tomemos a partir de un punto, y sobre el elipsoide, dos direcciones rectangulares entre sí y que formen los ángulos $Z_1$ y $Z_2$ con el meridiano del punto de tangencia, de modo que a esas direcciones correspondan las deformaciones máxima y mínima $\tau_1$ y $\tau_2$ determinadas por los valores $u_1$ y $u_2$ provenientes de la ecuación (40) y sustituídos en la (36).

A esas direcciones, que llamaremos $\eta$ $\xi$ corresponden sobre el mapa dos direcciones $x$ $y$ que son también rectangulares entre sí, según lo demostrado.

$\beta$ el ángulo que en esa posición cualquiera hace $ds$ con el eje $\eta\eta$. Se tendrá:

$$\eta = ds.cos\,\beta \qquad \xi = ds.sen\,\beta$$

Como a los segmentos $\eta$ $\xi$ sobre el elipsoide corresponden los segmentos $x_1$ $y_1$ sobre el plano, se tiene:

$$\frac{x_1}{\eta} = a \quad \therefore \quad \eta = \frac{x_1}{a}$$

$$\frac{y_1}{\xi} = b \quad \therefore \quad \xi = \frac{y_1}{b}$$

Sustituyendo se obtiene:

$$x_1 = a.ds.cos\,\beta \qquad y_1 = b.ds.sen\,\beta$$

Los segmentos que aquí figuran son infinitesimales, pero $ds$ es constante en magnitud, debemos tomarlo por unidad para poder referirnos a los límites hacia los cuales tienden las relaciones que resultan al dividir por $ds$, lo que equivale a elegir a $s$ como variable independiente; se tendrá entonces:

$$\eta = cos\,\beta \qquad \xi = sen\,\beta \qquad \text{en el elipsoide} \quad (42)$$

$$x_1 = a\,cos\,\beta \qquad y_1 = b\,sen\,\beta \qquad \text{en el plano.} \quad (43)$$

Eliminando el parámetro variable $\beta$ se obtendrán los lugares geométricos que describiría el extremo libre de $ds$, en el elipsoide; y en el plano el del extremo libre de su transformado $d\sigma$. Esta eliminación se consigna mediante

$$sen^2\,\beta + cos^2\,\beta = 1. \quad \text{Y resulta:} \quad \eta^2 + \xi^2 = 1$$

ecuación de un círculo, sobre el elipsoide.

$$\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{y_1^2}{b^2} = 1$$

ecuación de una elipse, sobre el plano.

Esta elipse es la elipse indicatriz o de Tissot.

En las ecuaciones (45), para $\beta = o$ $x_1 = a$ Y para $\beta = 90°$: $y_1 = b$. Por consiguiente los ejes

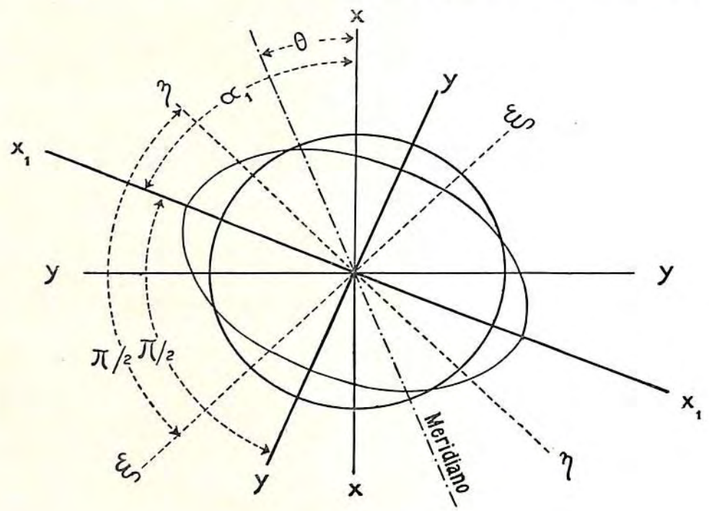


Figura 6a.

Consideremos ahora a $\eta$ y $\xi$ como ejes coordenados (para elementos de líneas) sobre el elipsoide y a $x_1$ $y_1$ por ejes coordenados sobre el mapa.

Ahora tomemos sobre el elipsoide un segmento infinitesimal $ds$, *de recta*, a partir del origen o sea a partir del punto de tangencia; sean $\eta$ $\xi$ sus componentes según los ejes $\eta\eta$ $\xi\xi$. A $\eta$ y $\xi$ corresponderán dos componentes sobre el plano que llamaremos $x_1$ $y_1$. En consecuencia se tendrá

$$\frac{x_1}{\eta} = a \qquad \frac{y_1}{\xi} = b \qquad (41)$$

Hemos designado con $\tau$ la relación de un segmento sobre el plano a su transformado sobre el elipsoide; $x_1\,x_1$ $y_1\,y_1$ son ejes rectangulares sobre el plano tangente con origen en el punto de tangencia; $\eta\eta$ $\xi\xi$ son los correspondientes ejes sobre el elipsoide, rectangulares también y con origen en el mismo punto de tangencia. Si en la ecuación de $\tau$ ecuación (36), damos a $u$ el valor $u_1$ $\tau$ tomará el valor $a$; para $u_2$ tomará el valor $b$.

Consideremos el segmento $ds$ de longitud constante y tomémoslo en una posición cualquiera; sea

— 532 —

principales de la elipse son: $a$ sobre $x_1\,x_1$ y $b$ sobre $y_1\,y_1$.

La relación entre este círculo y esta elipse nos permite considerar que dos diámetros rectangulares del círculo originan dos diámetros conjugados en la elipse; y a este respecto consideremos los diámetros del círculo formados por los elementos de meridiano y de paralelo que se cruzan sobre el punto de tangencia: habrá entonces sobre la elipse indicatriz un semidiámetro $\delta_1$ que es el transformado de $ds$ cuando coincide con el paralelo; en tales condiciones la ecuación (37) da

$$\tau_p = \frac{\sqrt{F}}{r} = \frac{\delta_1}{ds} \qquad \text{Si} \quad ds = 1 \qquad \delta_1 = \frac{\sqrt{F}}{r}$$

También habrá otro semidiámetro $\delta_2$ transformado del segmento $ds$ tomado sobre el meridiano, y en consecuencia la ecuación (38) da:

$$\delta_2 = \frac{\sqrt{D}}{r}$$

El teorema de Apolonio permite establecer:

$$\delta_1\,\delta_2\,sen\,\omega = \frac{\sqrt{DF}}{r^2}\,sen\,\omega = a\,b$$

en donde $\omega$ es el ángulo que forman entre sí los semidiámetros $\delta_1$ y $\delta_2$. El seno de este ángulo está dado por la ecuación (21)

$$sen\,\omega = \frac{J}{\sqrt{DF}} \qquad \text{Y sustituyendo:} \qquad ab = \frac{J}{r^2}$$

El segundo teorema de Apolonio dará:

$$a^2 + b^2 = \delta_1^2 + \delta_2^2 = \frac{F}{r^2} + \frac{D}{r^2} = \frac{D+F}{r^2}$$

Se tiene pues para determinar los valores de $a$ y de $b$ este sistema:

$$a^2 + b^2 = \frac{D+F}{r^2} \qquad (44) \qquad a\,b = \frac{J}{r^2} \qquad (45)$$

La elipse de Tissot suministra una imagen gráfica de las deformaciones que experimente la representación en un plano de la superficie elemental tomada sobre el elipsoide; imagen circunscrita al punto de tangencia del plano con el elipsoide. Si este punto es a la vez origen de coordenadas en el elipsoide y en el plano, dará una idea bastante aproximada, de todo el plano de la región, si ésta no es muy extensa con respecto a la superficie total del semi-elipsoide.

Los diámetros representan gráficamente las deformaciones de longitudes y la dirección en que se producen esas deformaciones; la elipse como transformación del círculo, dará idea de las deformaciones de figura; el área de la elipse comparada con la del círculo, que es $\pi$ dará idea del cambio de áreas.

La elección de los coeficientes $D, E, F$ modifica estas relaciones y esa elección determina la clase de proyección cartográfica.

Relacion de areas.—El área de la elipse es $\pi\,a\,b$; la del círculo es $\pi$. Si $A$ es relación de áreas, se tiene

$$A = \frac{\pi\,a\,b}{\pi} = a\,b = \frac{J}{r^2}$$

valor que también se obtiene dividiendo $\Sigma$ por $S$ expresadas por las ecuaciones (8) y (7).

Orientacion de la elipse indicatriz.—Si el eje $y\,y$ se toma como correspondiente a las magnitudes $rdL$ (segmentos de meridiano) se tendrá que el meridiano del punto de tangencia hará con el eje $y\,y$ el ángulo $\theta$ de la ecuación (14) y se tendrá:

$$tang.\,\theta = \frac{v}{p}$$

De modo que si el meridiano del punto de tangencia en el elipsoide *se confunde* con el meridiano del punto de tangencia en el plano (es decir, con su representación en el plano), el eje de las $y\,y$ del plano estará desalojado del meridiano en ese ángulo $\theta$. Y como el eje $y_1\,y_1$ hace con $y\,y$ el ángulo $\alpha$, el eje $y_1\,y_1$ hará con el meridiano el ángulo $\alpha - \theta$.

$$tang.(\alpha - \theta) = \frac{tang.\,\alpha - tang\,\theta}{1 + tang.\,\alpha\,tang.\,\theta}$$

$tang.\,\alpha$ se obtiene de la ecuación (24) escogiendo el valor de $u_m$ que hace mínimo a $\tau$. El cual a su vez resulta de la (40).

$$tang.\,\alpha = \frac{v + g\,u_m}{p + q\,u_m}$$

Se tiene pues

$$tang.(\alpha - \theta) = \left[\frac{v + g\,u_m}{p + q\,u_m} - \frac{v}{p}\right] \frac{1}{1 + \frac{v^2 + g\,v\,u_m}{p^2 + pq\,u_m}}$$

Y ejecutando operaciones:

$$tang.(\alpha - \theta) = \frac{J\,u_m}{D + E\,u_m}$$

Formulas fundamentales.—En resumen, las fórmulas fundamentales de transformación son:

*Angulos:*

$$T = \frac{u_2 - u_1}{1 + u_2\,u_1} \times \frac{D + u_1\,u_2\,F + (u_1 + u_2)\,E}{(u_1 - u_2)\,J}$$

En donde $u_1$ y $u_2$ son las tangentes de los azimutes que forman respectivamente cada uno de los lados del ángulo. Contando los azimutes del norte hacia el oeste.

*Distancias:*

$$\tau = \frac{\sqrt{D + 2\,E\,u + F\,u^2}}{r\sqrt{1 + u^2}}$$

$\tau =$ relación hacia la cual tiende una distancia $\sigma$ tomada sobre el mapa a la distancia $s$ que representa, cuyo azimut tiene $u$ por tangente.

*Areas:*

$$A = \frac{J}{r^2}$$

En donde $r$ es el radio del paralelo del punto medio del área (áreas pequeñas).

— 533 —

VALOR DE LOS SIMBOLOS:

$$v = \frac{\partial x}{\partial L} \quad \therefore \quad g = \frac{\partial x}{\partial \lambda} \quad \therefore \quad dL = \frac{\varrho}{r} d\varphi$$

$$p = \frac{\partial y}{\partial L} \quad \therefore \quad q = \frac{\partial y}{\partial \lambda}$$

$\lambda =$ longitud
$\varphi =$ latitud
$\varrho =$ radio de curvatura del meridiano.
$r =$ radio del paralelo

$$D = v^2 + p^2 \qquad E = vg + pq \qquad F = g^2 + q^2$$

$$J = pg + vq = \sqrt{DF - E^2}$$

APLICACION DE LAS FORMULAS

PROYECCION SINUSOIDAL:

a) En la proyección sinusoidal los paralelos deben quedar representados por líneas rectas. Eligiendo para los paralelos la dirección del eje $x\,x$ debe tenerse para $y$ una función independiente de $\lambda$. Por tanto

$$\frac{\partial y}{\partial \lambda} = o \qquad q = o$$

La $y$ correspondiente debe dar la posición del paralelo. Por tanto

$dy = \varrho\, d\varphi$ Y se podrá establecer $y = k \int \varrho\, d\varphi$

Pero $\varrho\, d\varphi = r\, dL$ $\therefore$ $y = k \int r\, dL + C$

$$\frac{dy}{dL} = kr = p$$

Estos valores de $p$ y $q$ dan

$$D = v^2 + k^2 p^2 \qquad E = vg \qquad F = g^2$$

Quedan 3 ecuaciones con 4 incógnitas que son $D, F, v, q$; podemos agregar otra condición.

La equivalencia de ángulo exige $T = 1$ O sea

$J = -1$ $\quad D = 1$ $\quad F = 1$ $\quad E = o$

De modo que esta condición no puede cumplirse.

La *equivalencia de distancias* exige $\tau = 1$; esto implica $D = F = r^2$, $E = o$. Incompatible con lo establecido. La equivalencia de áreas exige:

$$A = 1 \quad \text{O sea} \quad J = r^2$$

En nuestro caso $r^2 = J = pg - vq = pg = krg = r^2$

$$g = \frac{r}{k} \qquad \text{Como} \qquad g = \frac{\partial x}{\partial \lambda} \qquad r d\lambda = k dx$$

La integral del primer miembro es el desarrollo de un arco de paralelo, el paralelo definido por $y$. Llamando $\Delta\lambda$ ese arco se tiene:

$$x = \frac{r}{k} \Delta\lambda + C_1$$

Análogamente: $y = k\,\Delta\,\varphi + C_2$

Las constantes $C_1$ y $C_2$ son las coordenadas asignadas al origen.

---

*Nota.*—En este estudio se ha tomado para las $xx$ la dirección aproximada de E. a O. y para las $yy$ la de S. a N. En Cartografía es costumbre llamar con $yy$ el eje que va de E. a O. y con $xx$ el que va de S. a N.

Falta encontrar el valor de $v$.

$$v = \frac{\partial x}{\partial L} = \frac{r}{\varrho} \frac{\partial x}{\partial \varphi}$$

Pero $x = \frac{r}{k} \Delta\lambda$ $\therefore$ $\frac{\partial x}{\partial \varphi} = \frac{\Delta\lambda}{k} \frac{\partial r}{\partial \varphi}$

$$r = N \cos \varphi \qquad \therefore \qquad \frac{\partial r}{\partial \varphi} = -\varrho\, sen\, \varphi$$

$$\frac{\partial x}{\partial \varphi} = -\frac{\Delta\lambda}{k} \varrho\, sen\, \varphi \quad \text{Por tanto:} \quad v = -\frac{\Delta\lambda}{k} r\, sen\, \varphi.$$

Se tiene pues:

$$v = -\frac{\Delta\lambda}{k} r\, sen\, \varphi \qquad g = \frac{r}{k} \qquad p = k\,r \qquad q = o$$

El coeficiente $k$ puede escogerse de modo que haga mínima la deformación de distancia o la de ángulos.

$$D = \left[\frac{\Delta\lambda^2\, sen^2\, \varphi}{k^2} + k^2\right] r^2 = \left[\frac{\varepsilon^2}{k^2} - k^2\right] r^2$$

siendo $\varepsilon = \Delta\lambda\, sen\, \varphi$

$$E = -\Delta\lambda\, r^2\, sen\, \frac{\varphi}{k^2} \qquad F = \frac{r^2}{k^2} \qquad J = r^2$$

En los mapas de Colombia se ha hecho $k = 1$

$$D = [\varepsilon^2 - 1]\, r^2 \qquad E = -\varepsilon\, r^2 \qquad F = r^2 \qquad J = r^2$$

*Angulos:* $$T = \frac{1 - u_1 u_2 + (u_1 + u_2)\,\varepsilon - \varepsilon^2}{1 + u_1 u_2}$$

No se conservan los ángulos; varían con la latitud y con el azimut.

*Distancias:* $$\tau = \sqrt{\frac{\varepsilon^2 - 2\,u\,\varepsilon - 1 + u^2}{1 + u^2}}$$

No se conservan las distancias; varían con la latitud y con el aximut.

*Areas:* $$A = \frac{J}{r^2} = \frac{r^2}{r^2} = 1$$

Se conservan las áreas.

*Elipse indicatriz:*

$$a^2 + b^2 = \frac{D + F}{r^2} = \varepsilon^2 + 2 \qquad ab = \frac{J}{r^2} = 1$$

Por consiguiente:

$$a - b = \varepsilon \qquad a + b = \sqrt{\varepsilon^2 + 4}$$

$\varepsilon = L.\, sen\, \varphi$ $\qquad L =$ longitud en radianos

El cálculo de $b$ para algunos puntos de la República, se expresa con ayuda del cuadro siguiente:

| NOMBRES | $\lambda$ | L | $\varphi$ | Sen $\varphi$ | $\varepsilon$ |
|---|---|---|---|---|---|
| Guajira ..... | 3° | 0.05236 | 12°30′ | 0.21644 | —0.01135 |
| Puerto Carreño..... | 6° | 0.10472 | 6°00′ | 0.10453 | —0.01095 |
| Piedra del Cocuy... | 7° | 0.12217 | 1°10′ | 0.02036 | —0.00287 |

| | | |
|---|---|---|
| Para la Guajira | b = 1.00568 | 5.6 °/oo de exceso |
| Para Puerto Carreño | 1.00549 | 5.5 " de exceso |
| Para Piedra del Cocuy | 1.00144 | 1.4 " de exceso |



PROYECCION DE GAUSS TRANSVERSA

Para la proyección de Gauss, se tiene: según la *Publicación Especial Nº 2* del Instituto Geográfico Militar y Catastral:

$$D = F \quad . \quad E = O \qquad J = D = F$$

De estas ecuaciones se obtiene:

$$p = g \qquad q = -v$$

Estos valores dan, siendo

$$x_1 = \frac{\partial x}{\partial \varphi} \qquad y_1 = \frac{\partial y}{\partial \varphi}$$

*Angulos:* $T = 1$ Se conservan los ángulos.

*Distancias:* $$\tau = \frac{\sqrt{D}}{\mathrm{r}} = \sqrt{x_1^2 + y_1^2} \frac{\cos \varphi}{r}$$

No se conservan las distancias; varían con la latitud y son independientes del azimut.

*Areas:* $$A = \frac{D}{r^2} = \tau^2 = (x_1^2 + y_1^2)\, \frac{\cos^2 \varphi}{r^2}$$

No se conservan las áreas; varían con la latitud.

Del mapa de isomecoicas de la publicación citada, se obtiene para las deformaciones de distancias:

| | |
|---|---|
| En la Guajira | 1.0 °/oo de exceso |
| En Puerto Carreño | 6.4 °/oo de exceso |
| En Piedra del Cocuy | 7.0 °/oo de exceso |

CUADRO COMPARATIVO

*entre las proyecciones Sinusoidal y de Gauus para Colombia*

Reasumiendo el estudio anterior se tiene:

| SINUSOIDAL | GAUSS TRANSVERSA |
|---|---|
| Conserva áreas | No conserva áreas |
| No conserva rumbos | Conserva rumbos |
| Deforma las figuras | No deforma las figuras |
| Las escalas cambian para cada lugar y de modo diferente siguen la dirección. | Las escalas cambian para cada lugar, pero de igual modo sin depender de las direcciones. |
| La máxima deformación en distancias alcanza: | La máxima deformación en distancias alcanza: |
| La Guajira 5.6 °/oo | La Guajira 1. °/oo |
| Puerto Carreño 5.5 °/oo | Puerto Carreño 6.4 °/oo |
| Piedra del Cocuy 1.4 °/oo | Piedra del Cocuy 7.0 °/oo |

La mayor ventaja de la proyección de Gauss está en que la forma no se pierde, lo que es de gran utilidad con respecto al público, interesado en el Catastro, y conserva los rumbos, que es condición necesaria para la milicia. Además en las planchas parciales del mapa hecho en proyección de Gauss, cuando no abarcan mucha extensión, puede inscribirse un coeficiente para corregir suficientemente el error en distancias, ocasionado por el empleo de la escala general adoptada, porque dichos errores se traducen en diferencias de escalas, para la proyección de Gauss.