

ENTRETENIMIENTOS MATEMATICOS

JULIO GARAVITO A.

Director del Observatorio Astronómico Nacional, de 1892 a 1919

DEMOSTRACION DEL JUEGO DE LA AGUJA

La demostración del juego de la aguja se funda en el teorema de Bernoulli perteneciente al Cálculo de las probabilidades.

Este juego consiste en lo siguiente:

Se traza sobre un papel una serie de paralelas equidistantes: AA' , BB' , CC' etc. Se toma una aguja cuya longitud sea la mitad exacta de la distancia de dos paralelas consecutivas y se arroja sobre el papel un número m de veces y se cuenta el número n de veces que la aguja encuentra a una cualquiera de las paralelas. Hecho esto, se observará que la relación $\frac{m}{n}$ tiene un valor próximo de $\pi = 3.1415926 \dots$ y que esta relación se aproxima tanto más a π cuanto mayor sea el número m de pruebas; o en otros términos, que $\limite \frac{m}{n} = \pi$ cuando m tiende al ∞ .

Cuando la longitud de la aguja es menor que la distancia de las paralelas, pero no la mitad exacta, la regla será dada por la fórmula $\limite \frac{m}{n} \cdot \frac{4l}{D} = \pi$ cuando m tiende al ∞ . En esta expresión $2l$ representa la longitud de la aguja y D la distancia de dos paralelas consecutivas.

Sean AA' BB' (Fig. 1.^a) dos paralelas consecutivas y $D=AB$ su distancia. Sea M el punto medio de AB . Tracemos por este punto MS paralela a AA' ; llamemos $2l$ la longitud de la aguja. Tendremos según el caso general del juego: $2l < D \therefore l < \frac{1}{2}D$ ó $l < MA$. Por tanto, si la aguja encuentra a una de las paralelas, no podrá encontrar más que a ésta.

Podemos considerar la faja $AA'BB'$ como aquella donde cae siempre el centro de la aguja; puesto que si cae en otra faja, aquélla la podemos superponer sobre ésta sin que por ello se altere la probabilidad de encuentro de la aguja con una de las paralelas que forman la faja. Por tanto, toda posición de la aguja sobre el papel encuentra su equivalente en la faja $AA'BB'$.

Esto supuesto, el centro de la aguja podemos considerarlo como que cae siempre sobre la semi-faja $MSAA'$ o sobre la semi-faja $MSBB'$.

Si el centro de la aguja cae en la semi-faja $MSBB'$, por ejemplo, en c_2 y es p_2q_2 la posición de la aguja, podremos encontrarle en la primera semi-faja una posición equivalente bajo el punto de vista de la probabilidad de encontrar la paralela más inmediata a su centro. Esta posición será evidentemente la p_1qq_1 simétrica de $p_2c_2q_2$ respecto de la mediana MS . Podemos, pues, considerar la semi-faja $AA'MS$ como la región donde cae en todas las pruebas el centro de la aguja. Hay más aún, podemos encontrar sobre MA una posición del centro de la aguja equivalente a cualquiera otra. Por ejemplo, supongamos que la aguja cae en p_1qq_1 . Podemos traerla paralelamente a sí misma hasta que su centro caiga sobre MA en c ; siendo $CA=qA_1$. Entonces la aguja ocupará la posición KcD que será en todo equivalente a p_1qq_1 . Por tanto, podemos considerar MA como el lugar donde cae siempre el centro de la aguja en todas las pruebas.

Admitido lo anterior, nos proponemos encontrar el número que nos represente la probabilidad, en cada prueba, de que la aguja encuentre a una de las paralelas.

Podemos estudiar el asunto geoméricamente de varios modos, de los cuales exponemos el siguiente: Supongamos que el centro de la aguja cae en c . Una de sus extremidades tendrá que caer forzosamente sobre la semi-circunferencia $\alpha ED\beta$; por tanto, esta semi-circunferencia representará el número de casos (*chances*) correspondientes a una sola posición del centro de la aguja; y como solamente cuando cae la extremidad de la aguja sobre el arco ED , podrá encontrar a la paralela, el arco ED representará el número de casos favorables.

Sea O el punto que dista de AA' la longitud $OA=l$ igual a la mitad de la longitud de la aguja. Tomemos este punto por origen de coordenadas, por eje de las x la línea OA y por eje de las y la línea Oy . Al arrojar la aguja hemos visto que puede considerarse como que su centro cae sobre uno de los puntos de MA . Si cae en f el número total de casos será igual a la semi-circunferencia rectificad; tomemos, pues, esta semi-circunferencia rectificad como ordenada y tendremos $ff'=\pi l$, que nos representará el número de casos que pueden ocurrir para una sola posición del centro de la aguja. Como este número de casos es constantemente igual, obtendremos siempre la misma ordenada; y el número total de casos, es decir, el conjunto de todos los casos para todas las posiciones del centro de la aguja, estará representado por el conjunto de todas las ordenadas iguales a $ff'=\pi l$, levantadas sobre MA , es decir, el área engendrada por ff' cuando f se mueve de M a A , la cual será igual al área del rectángulo $AA'MN$. Representado este número total de casos por C tendremos: $C = \frac{1}{2}\pi l D$.

Cuando el centro de la aguja cae entre M y O no habrá casos favorables, pues la aguja no alcanzará a encontrar a AA' porque $OA=l$. Si cae entre O y A sí habrá casos favorables y éstos esta-

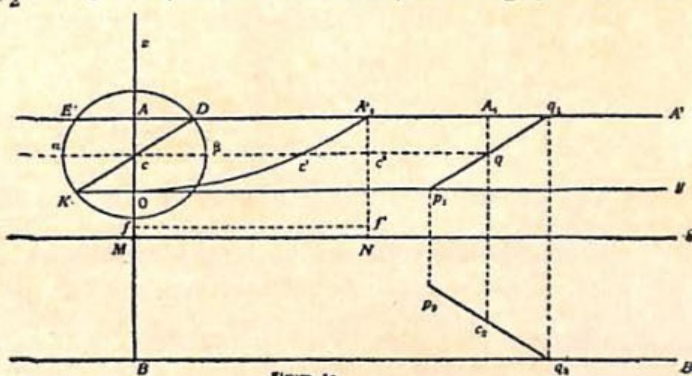


Figura 1a.

rán representados por el arco ED cuando el centro cae en c correspondiente a una abscisa positiva $cO = x$. Los casos favorables correspondientes, pues, a la posición c del centro de la aguja estarán dados por

$$2l \operatorname{arc} \cos \frac{Ac}{l} = 2l \operatorname{arc} \cos \frac{l-x}{l}.$$

Tomando como ordenada este valor

$$y = 2l \operatorname{arc} \cos \frac{l-x}{l} = 2l \operatorname{arc} \cos \left(1 - \frac{x}{l}\right) = cc'.$$

El número total de casos favorables estará representado por el área engendrada por la ordenada variable $y = cc'$, cuando c se mueve de O a A ; es decir, por el área $Oc'A'A$ comprendida entre la curva $Oc'A'$, cuya ecuación es: $y = 2l \operatorname{arc} \cos \left(1 - \frac{x}{l}\right)$, el eje de las x y dos ordenadas correspondientes a las abscisas $x=0$, $x=l$. Llamemos este número de casos favorables F . Tendremos:

$$F = 2l \int_0^l \operatorname{arc} \cos \left(1 - \frac{x}{l}\right) dx.$$

Poniendo: $Z = \operatorname{arc} \cos \left(1 - \frac{x}{l}\right)$ tendremos: $1 - \frac{x}{l} = \cos Z \quad \therefore \quad dx = l \operatorname{sen} Z dZ.$

Y queda, puesto que para $x=l$: $Z = \frac{\pi}{2}$; y para $x=0$: $Z=0$

$$F = 2l \int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{arc} \cos \left(1 - \frac{x}{l}\right) dx = 2l^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} z \operatorname{sen} z dz$$

$$F = 2l^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} z d \cos z = -2l^2 \left[z \cos z - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos z dz \right] = -2l^2 [z \cos z - \operatorname{sen} z] + C =$$

$$= -2l^2 \left[\frac{\pi}{2} \times 0 - 1 \right] + 2l^2 [0 \times 1 - 0] = 2l^2.$$

La probabilidad será, pues, dada por $p = \frac{F}{C} = \frac{2l^2}{\frac{1}{2}\pi l D} = \frac{4l}{\pi D}$. Y su inverso será: $\frac{1}{p} = \pi \frac{D}{4l}$.

El teorema de Bernoulli puede enunciarse así:

A medida que se multiplican las pruebas se tiene una probabilidad siempre creciente de que la relación del número de acontecimientos N al de acontecimientos contrarios Q no se separará de la relación de sus probabilidades más allá de un límite dado, por exceso o por defecto, y por estrecho que este límite sea, la probabilidad de que se trata se aproxima a la unidad tanto como se quiera, siempre que se aumente suficientemente el número de pruebas. En otros términos, llamando p la probabilidad correspondiente a la primera clase de acontecimientos, la contraria será $1-p$. Y tendremos:

$\limite \frac{n}{q} = \frac{p}{1-p}$ cuando $n+q=m$ tiende al ∞ . En esta expresión llamamos m el número total

de pruebas. Se deduce de esto que $\limite \frac{n}{q+n} = \limite \frac{n}{m} = p$. Y por tanto: $\limite \frac{m}{n} = \frac{1}{p}$.

Como en el caso en cuestión $\frac{1}{p} = \pi \frac{D}{4l}$ tendremos: $\limite \frac{m}{n} = \pi \frac{D}{4l}$. O bien:

$\limite \frac{m}{n} \cdot \frac{4l}{D} = \pi$. Lo que demuestra la regla enunciada.

Si la longitud de la aguja es igual a la mitad de la separación de las paralelas, es decir, si $2l = \frac{1}{2} D$ se tendrá $4l = D$. Y en consecuencia: $\limite \frac{m}{n} = \pi$.

DETERMINACION DE LA FORMA QUE DEBE TENER LA SECCION MERIDIANA DE UN MANOMETRO DE AIRE COMPRIMIDO PARA QUE LA GRADUACION SEA UNIFORME

El manómetro de aire comprimido se compone de un tubo de vidrio cerrado por una extremidad y abierto por la otra. La extremidad abierta se sumerge en una cubeta de hierro forjado llena de mercurio y que comunica por un tubo lateral, también de hierro, con el recipiente en el cual está el gas o el vapor de que se quiere medir la tensión. El manómetro está construido de tal manera que cuando el nivel del mercurio en la cubeta y en el manómetro es el mismo, la tensión del aire contenido en éste es de una

atmósfera. A medida que la tensión en el receptáculo aumenta, pasa una porción del mercurio contenido en la cubeta dentro del manómetro, el nivel se eleva en éste y comprime al aire allí contenido y cesa el ascenso del mercurio hasta que la tensión del aire contenido en el manómetro y la presión debida a la diferencia de nivel del mercurio hagan equilibrio a la tensión del gas o vapor del receptáculo.

Estudiemos el manómetro tal como se construye de ordinario. El tubo manométrico es cilíndrico, lo mismo que la cubeta. Sean r , R' y H los radios del tubo y de la cubeta y la altura total del tubo sobre el nivel normal del mercurio de la cubeta (Fig. 2.^a); sea P la presión del vapor o del gas en el receptáculo y T la tensión del aire contenido en el tubo cuando el nivel del mercurio es m ; sean x la altura del mercurio del tubo sobre el nivel normal e y el descenso del nivel del mercurio en la cubeta respecto del mismo nivel normal. Tendremos en atmósferas, poniendo $R'^2 - \rho^2 = R^2$ (siendo ρ el radio exterior del

tubo): $P = T + \frac{x+y}{0.76}$. Expresión en que x é y están expresados en metros.

Ahora, entre x é y tendremos la relación:

$$\pi r^2 x = \pi R^2 y \quad \therefore \quad y = \left(\frac{r}{R}\right)^2 x \quad \text{De donde:} \quad x + y = \left(1 + \left(\frac{r}{R}\right)^2\right) x.$$

Según la ley de Mariotte tendremos:

$$\frac{T}{1} = \frac{V}{V_x} = \frac{\pi r^2 H}{\pi r^2 (H-x)} \quad \text{De donde:} \quad T = \frac{H}{H-x}. \quad \text{Y por tanto:} \quad P = \frac{H}{H-x} + \frac{\left(1 + \left(\frac{r}{R}\right)^2\right) x}{0.76}.$$

Esta ecuación diferenciada da:

$$dP = \frac{H dx}{(H-x)^2} + \frac{\left(1 + \left(\frac{r}{R}\right)^2\right) dx}{0.76} \quad \text{De donde:} \quad dx = \frac{dP}{\frac{H}{(H-x)^2} + \frac{1 + \left(\frac{r}{R}\right)^2}{0.76}}$$

Como esta misma relación existe entre los incrementos cuando éstos son muy pequeños, tendremos:

$$\Delta x = \frac{\Delta P}{\frac{H}{(H-x)^2} + \frac{1 + \left(\frac{r}{R}\right)^2}{0.76}} \quad (A)$$

Observando la ecuación (A) notamos que para incrementos iguales de P los correspondientes de x serán tanto menores cuanto mayor sea x . De esto se deduce que las graduaciones del manómetro deben ir disminuyendo cuando la altura crece. Las indicaciones del manómetro, debiendo ser tanto más claras cuanto más elevada sea la presión, resulta de esto un inconveniente grave, pues a mayor presión las divisiones son más pequeñas.

Otro inconveniente del manómetro de aire comprimido está en que el oxígeno del aire contenido en el tubo manométrico es absorbido poco a poco por la oxidación del mercurio, de donde resulta un enrarecimiento en este aire y, por tanto, indicaciones erradas en el manómetro. Este último inconveniente es fácil de remediar por la renovación del aire, o mejor aún, llenando el tubo, desde su construcción, con un gas que no tenga afinidad por el mercurio.

Me propongo, pues, estudiar la manera de remediar el primer inconveniente indicado; trataré de buscar si hay alguna forma especial que pueda dársele al tubo manométrico, de tal manera, que la graduación sea igual en toda la extensión del tubo. En esta exposición seguiré el mismo derrotero que he seguido en la investigación del problema.

Considero el tubo manométrico, o más bien su capacidad interior, como un sólido de revolución alrededor de un eje vertical, y determinaré la ecuación de la sección meridiana para las condiciones siguientes:

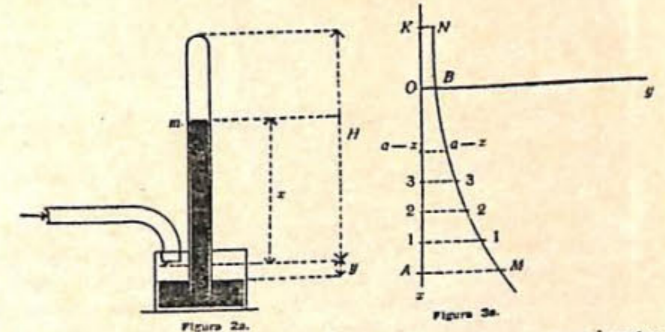
- 1.º Que la graduación se refiera a la tensión del aire dentro del tubo manométrico;
- 2.º Que represente la presión en la superficie de nivel correspondiente al nivel normal del mercurio; es decir, al nivel que ocupa el mercurio cuando está a la misma altura dentro del tubo que en la cubeta; y
- 3.º Que dicha graduación represente la presión en la superficie libre del mercurio en la cubeta, es decir, la presión del gas o vapor del receptáculo que comunica con el manómetro.

Primer caso.—Tomemos el eje de revolución por eje de las x y por origen un punto cualquiera O (Fig. 3.^a) de dicho eje. Sean AM el nivel normal del mercurio que corresponde a una tensión de una atmósfera, 1-1 el nivel del mercurio cuando la tensión es de 2 atmósferas, 2-2 cuando es de 3 etc., $a-x$ cuando la tensión es de $a-x+1$ atmósferas, nivel que corresponde a una abscisa x . Las divisiones $A-1$, 1-2, 2-3 etc., son iguales y las tomamos por unidad de longitud. Sea $OA = a$ unidades. Sea KN el límite hasta donde debe extenderse el tubo por su parte superior, y pongamos $KO = -K$. Llamemos V_a el volumen engendrado por la revolución de $KAMN$ alrededor del eje de las x . Tendremos:

$$V_a = \pi \int_K^a y^2 dx$$

Llamemos V_x el volumen engendrado por la revolución de $KN - (a-x) - (a-x)$, en que $O(a-x) = x$. Tendremos:

$$V_x = \pi \int_K^x y^2 dx$$



Cuando el nivel del mercurio se halla en $(a-x)(a-x)$ la tensión del aire deberá ser de $a-x+1$ atmósferas; y según la ley de Mariotte, que se refiere a la relación inversa entre los volúmenes y las presiones de una misma masa gaseosa, resultará:

$$V_x = \frac{V_a}{a-x+1} \quad \text{O bien:} \quad (1) \quad \int_k^x y^2 dx = \frac{V_a}{\pi} \cdot \frac{1}{a-x+1} \quad \therefore \quad (2) \quad (a-x+1) \int_k^x y^2 dx = \frac{V_a}{\pi}$$

Diferenciando a (2) con relación a x tendremos:

$$(a-x+1)y^2 - \int_k^x y^2 dx = 0 \quad \text{De donde} \quad \int_k^x y^2 dx = y^2(a-x+1)$$

Sustituyendo este valor en (1) tendremos:

$$y^2(a-x+1) = \frac{V_a}{\pi} \cdot \frac{1}{a-x+1} \quad \text{Y por tanto:} \quad y^2 = \frac{V_a}{\pi} \cdot \frac{1}{(a-x+1)^2}$$

$$\text{De donde} \quad y = \sqrt{\frac{V_a}{\pi}} \cdot \frac{1}{a-x+1} \quad (3)$$

Esta expresión es la ecuación de una hipérbola equilátera referida a una asíntota y a otra recta paralela a la asíntota a una distancia $a+1$ de aquélla. Veamos qué altura debemos darle al tubo manométrico cuando se fija de antemano su capacidad total interior V_a . Se tiene:

$$V_x = \pi \int_k^x y^2 dx = \pi \int_k^x \frac{V_a}{\pi} \cdot \frac{1}{(a-x+1)^2} dx$$

$$\text{O bien:} \quad V_x = V_a \int_k^x \frac{dx}{(a-x+1)^2} = V_a \int_k^x \frac{1}{a-x+1} = V_a \left(\frac{1}{a-x+1} - \frac{1}{a-k+1} \right)$$

Y como V_x debe igualarse a V_a para $x=a$, tendremos:

$$V_x = V_a = V_a \left(1 - \frac{1}{a-k+1} \right) \quad \text{De donde:} \quad \frac{1}{a-k+1} = 0 \quad \text{Y por tanto:} \quad k = -\infty$$

Parece que fuera necesario dar al manómetro una altura infinita para que satisfaga las condiciones del problema; sin embargo, esta imposibilidad teórica proveniente de considerar la continuidad de la curva como solución matemática de la cuestión, puede obviarse en la práctica notando lo siguiente: 1.º Que el volumen engendrado por la curva en su rotación es finito; 2.º Que la ley de Mariotte relativa a los volúmenes y a las presiones no tiene para nada en cuenta la forma que afecta la capacidad; y 3.º Que no se necesita medir tensiones infinitas.

Con estas notas fácilmente se comprende la manera de realizarlo en la práctica. Extenderemos, para el efecto, la curva desde $x=0$ hasta $x=a$; es decir, sólo tomaremos la porción *OBMA* (Fig. 3.º) y reemplazaremos el volumen engendrado por *OKNB* por una capacidad equivalente y de cualquier otra forma, por ejemplo, de forma esférica. Ese volumen es:

$$V_o = V_a \int_{-\infty}^0 \frac{dx}{(a-x+1)^2} = \frac{V_a}{a+1}$$

El valor a lo fijaremos mediante la mayor tensión que podamos producir. Así, para esa mayor tensión el nivel del mercurio deberá llegar a la capacidad esférica, sin entrar en ella; y si llamamos H el número de atmósferas, tendremos $a+1=H$; de donde $a=H-1$. Daremos, pues, al manómetro la forma que está representada en la (Fig. 4.º) en que la graduación se extenderá hasta O y se terminará por una esfera cuyo volumen será $V_o = \frac{V_a}{a+1}$.

Comprobación.—Busquemos el volumen ocupado por el aire cuando el mercurio ocupa el nivel *MM'*, es decir, el volumen de la capacidad esférica más el engendrado por *ONMQ* (Fig. 4.º) y llamemos $x=OQ$ y

$$V_o = \frac{V_a}{a+1} \quad \text{la capacidad esférica. Tendremos entonces:} \quad V_x = V_o + \pi \int_0^x y^2 dx$$

O bien:

$$V_x = \frac{V_a}{a+1} + \pi \int_0^x \frac{V_a}{\pi} \cdot \frac{1}{(a-x+1)^2} dx = \frac{V_a}{a+1} + V_a \int_0^x \frac{1}{a-x+1} \therefore V_x = \frac{V_a}{a+1} + V_a \left(\frac{1}{a-x+1} - \frac{1}{a+1} \right) = \frac{V_a}{a-x+1}$$

Las tensiones estando en razón inversa de los volúmenes, tendremos: $\frac{T_x}{T_a} = \frac{V_a}{V_x} \therefore T_x = T_a(a-x+1)$.

Y como la tensión T_a correspondiente al volumen V_a (es decir, cuando el nivel del mercurio es el nivel normal *SS*) es $T_a=1$ atmósfera, la tensión T_x expresada en atmósferas es $T_x=a-x+1$ que es función lineal de la abscisa; y por tanto, el incremento ΔT_x es constante y la graduación uniforme.

Tal como hemos estudiado el manómetro, no tiene utilidad práctica, pues sólo nos daría las tensiones del aire contenido en el tubo manométrico, pero no la tensión del gas o del vapor en el receptáculo que

comunica con el manómetro; tendríamos que agregar la presión debida a la altura de la columna mercurial sobre el nivel normal y la debida al descenso del nivel en la cubeta debajo de dicho nivel normal. Antes de resolver el problema general estudiaremos la forma de la sección meridiana para el caso de que la graduación uniforme nos represente la presión en la superficie de nivel correspondiente al nivel normal, lo que constituye el segundo caso. Este estudio lo hacemos con el fin de pasar fácilmente al caso práctico.

Segundo caso.—Haremos uso de la figura 3.º del caso anterior. Llamemos de la misma manera $a=$ número de divisiones iguales contenidas en *OA*, divisiones cuya longitud tomaremos por unidad: así $OA=a$. Supongamos que el nivel del mercurio va tomando diferentes posiciones, y sean $a, a-1, a-2 \dots x \dots 3, 2, 1, 0$ las abscisas y $V_a, V_{a-1}, V_{a-2} \dots V_x \dots V_3, V_2, V_1, V_0$ los volúmenes correspondientes ocupados por el aire del manómetro.

$T_a, T_{a-1}, T_{a-2} \dots T_x \dots T_3, T_2, T_1, T_0$ serán las tensiones del aire correspondientes y $P_a, P_{a-1}, P_{a-2} \dots P_x \dots P_3, P_2, P_1, P_0$ las presiones en la superficie de nivel correspondiente al nivel normal. Se tendrá evidentemente $T_a = P_a = 1$ atmósfera, puesto que en este caso el nivel del mercurio ocupa el nivel normal.

Sea h la altura de la columna mercurial correspondiente a una atmósfera, es decir, 0.76m expresados tomando por unidad una división del tubo, que hemos elegido por unidad de medida.

Cuando el nivel del mercurio está en la abscisa x , la tensión del aire contenido en el manómetro es T_x y la altura de la columna mercurial sobre el nivel normal es $a-x$; por tanto, la presión en la superficie de nivel correspondiente al nivel normal será en atmósferas:

$$P_x = T_x + \frac{a-x}{h} \quad \text{y} \quad T_x = P_x - \frac{a-x}{h}$$

La división de la escala manométrica correspondiente a la abscisa x debe ser $a-x+1$ pues hay $a-x$ divisiones comprendidas entre esta sección y *A*. En este punto *A* debe estar marcada 1 atmósfera; por tanto, el valor de P_x en atmósferas, según las condiciones del problema, deberá ser $P_x = a-x+1$. Y por tanto:

$$T_x = a-x+1 - \frac{a-x}{h} = \frac{1}{h} [(a-x)(h-1) + h] \quad \text{Y como según la ley de Mariotte} \quad \frac{T_x}{T_a} = \frac{T_x}{1} = T_x = \frac{V_a}{V_x}$$

$$\text{resulta:} \quad T_x V_x = V_a \quad \text{O bien:} \quad \frac{1}{h} [(a-x)(h-1) + h] \pi \int_k^x y^2 dx = V_a \quad (4)$$

Diferenciando con relación a x y suprimiendo el factor π tendremos:

$$y^2 \frac{1}{h} [(a-x)(h-1) + h] - \frac{h-1}{h} \int_k^x y^2 dx = 0 \quad \text{Resulta:} \quad \int_k^x y^2 dy = \frac{1}{h-1} [(a-x)(h-1) + h] y^2$$

Y llevando este valor a (4) queda: $\frac{\pi}{h(h-1)} [(a-x)(h-1) + h]^2 y^2 = V_a$ La forma de la sección

meridiana será: $y = \sqrt{\frac{V_a h}{\pi(h-1)}} \cdot \frac{h-1}{(a-x)(h-1) + h}$ que es también una hipérbola de asíntotas

perpendiculares. Esta ecuación se puede escribir más cómodamente así:

$$y = \sqrt{\frac{V_a h}{\pi(h-1)}} \cdot \frac{1}{a-x + \frac{h}{h-1}} \quad (\alpha)$$

Vamos ahora, como en el caso anterior, a fijar el valor de k y a obtener el volumen de la capacidad esférica en que debe terminar el manómetro por su parte superior. Tendremos:

$$V_a = \pi \int_k^a y^2 dx = \pi \int_k^a \frac{V_a h}{\pi(h-1)} \cdot \frac{1}{\left(a-x + \frac{h}{h-1}\right)^2} dx = V_a \frac{h}{h-1} \int_k^a \frac{1}{a-x + \frac{h}{h-1}} = \frac{V_a h}{h-1} \left(\frac{h-1}{h} - \frac{1}{a-k + \frac{h}{h-1}} \right)$$

De donde, suprimiendo de ambos miembros a V_a , resulta:

$$1 = 1 - \frac{h}{h-1} \cdot \frac{1}{a-k + \frac{h}{h-1}} \quad \text{Expresión en la cual se deberá tener} \quad k = \pm \infty. \quad \text{Y como es límite inferior:} \quad k = -\infty.$$

Ahora, el volumen V_o de la capacidad esférica será:

$$V_o = \pi \int_{-\infty}^0 y^2 dx = \frac{V_a h}{h-1} \cdot \frac{1}{a + \frac{h}{h-1}} = \frac{V_a h}{a(h-1) + h}$$

Comprobación.—Se tiene para expresión de la presión P_x en atmósferas:

$$P_x = T_x + \frac{a-x}{h} \quad \text{y} \quad T_x = \frac{V_a}{V_x}$$

Ahora,

$$V_x = V_o + \pi \int_0^x y^2 dx = V_o + \frac{V_a h}{h-1} \int_0^x \frac{dx}{(a-x + \frac{h}{h-1})^2} = \frac{V_a h}{(a-x)(h-1) + h}$$

Por tanto: $P_x = \frac{(a-x)(h-1) + h}{h} + \frac{a-x}{h} = a-x+1$ que es el número de atmósferas que debe marcarse en la abscisa x .

EJEMPLO.—Trátase de construir un manómetro con divisiones iguales, que representen en atmósferas las presiones en las superficies de nivel correspondientes al nivel normal del mercurio; siendo la capacidad interior del manómetro, cuando el nivel del mercurio es el normal, de 10 litros y las divisiones de la escala correspondientes a una atmósfera de 1 decímetro y que puedan leerse presiones hasta de 10 atmósferas.

La unidad de medida será el decímetro, y tendremos: $V_a = 10 \therefore a = 9 \therefore h = 7,6$.
La ecuación de la curva de la sección meridiana será:

$$y = \sqrt{\frac{7,6}{6,6\pi} \cdot 10 \cdot \frac{1}{9 + \frac{7,6}{6,6} - x}} \quad \text{O bien:} \quad y = \frac{3,665}{10,1515 - x}$$

estando estas ordenadas expresadas también en decímetros. El volumen de la esfera terminal será:

$$V_o = \frac{V_a h}{a(h-1) + h} = \frac{10 \times 7,6}{9 \times 6,6 + 7,6} = 1,1343.$$

DISCUSION DE LA ECUACION DE LA SECCION MERIDIANA

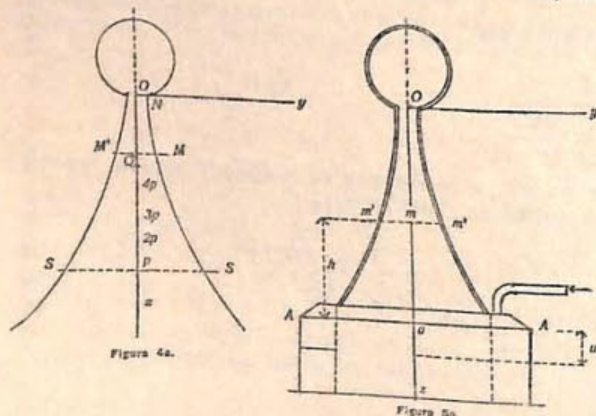
Vimos atrás la ecuación (x) de la sección meridiana teórica.

$$(x) \quad y = \sqrt{\frac{V_a h}{\pi(h-1)} \cdot \frac{1}{a-x + \frac{h}{h-1}}}$$

1.º Si $h > 1$, es decir, si la división de la escala es menor que 0^m.76, la ecuación (x) representará una curva real y el manómetro será prácticamente realizable.

2.º Si $h = 1$ y V_a finito, el valor y será igual a $\infty \times 0$; pero suprimiendo $\sqrt{h-1}$ se obtendrá $y = 0$, que es su verdadero valor.

Siendo las divisiones de la escala iguales a la altura correspondiente a una atmósfera, los incrementos de presión correspondientes a cada unidad de la escala, debidos a la altura de la columna mercurial, serán de una atmósfera; por tanto, la tensión del aire contenido en el tubo manométrico deberá ser constante, y como el volumen total es finito, el volumen desalojado por el mercurio deberá ser nulo, y como no lo es su altura, deberá serlo la sección transversal; luego $y = 0$. Esto también lo dice la fórmula que da el vo-



lumen de la esfera terminal: $V_o = \frac{V_a h}{a(h-1) + h} = V_a$

Por tanto, volumen engendrado por $OBMA = 0$. (Fig. 3.º)

3.º Si $h = 1$ y $V_a = \infty$, la fórmula da:

$$y = \sqrt{\frac{V_a h}{\pi(h-1)} \cdot \frac{h-1}{(a-x)(h-1) + h}} = \sqrt{\frac{1}{\pi h} \cdot \sqrt{\infty} \cdot \sqrt{0}}$$

valor efectivamente indeterminado, pues no hay relación que ligue a V_a con h .

El volumen de la esfera terminal será también infinito.

La forma de la sección es, pues, cualquiera, y en lugar de esfera terminal puede dejarse libre la extremidad; estamos, pues, en el caso de un manómetro de aire libre, como se comprende fácilmente.

podrá construirse el manómetro con esa condición.

4.º Si $h < 1$ la curva será imaginaria; no veamos lo que nos dice el razonamiento.

El incremento de presión debido a la altura de mercurio es mayor que una atmósfera por cada unidad de escala que se ascienda; por tanto, para que el incremento total fuera de una atmósfera sería necesario que la tensión del aire contenido en el manómetro fuera negativa, lo cual es imposible.

Corrección para obtener la presión efectiva.—Supongamos la cubeta cilíndrica y de radio r ; llamando y_a el radio de la base del manómetro supuesto terminado inferiormente en cilindro, como lo muestra la figura 5.º El descenso $x = Om$ lo obtendremos mediante la relación siguiente, en que u representa dicho descenso y e el espesor del vidrio en la parte cilíndrica del tubo, a saber:

$$\pi(r^2 - (y_a + e)^2)u = V_a - V_x \quad \text{O bien, puesto que} \quad V_x = V_a \cdot \frac{h}{h-1} \cdot \frac{1}{a-x + \frac{h}{h-1}}$$

Poniendo $a - x = am = b$ queda $\pi(r^2 - (y_a + e)^2)u = V_a \left(1 - \frac{h}{(h-1)b+h}\right) = \frac{V_a(h-1)b}{(h-1)b+h}$

De donde $u = \frac{V_a(h-1)b}{\pi((h-1)b+h)(r^2 - (y_a + e)^2)}$ La corrección que debe hacerse a las presiones

marcadas será dada por la relación $\frac{u}{h}$ que deberá agregarse a dichas presiones.

Tercer caso.—Secciones meridiana del manómetro y de su cubeta, de manera que siendo la graduación uniforme represente la presión del gas o vapor del receptáculo que comunica con el manómetro. Supongamos terminado el manómetro por su parte inferior, abajo del nivel normal, en cilindro, y vamos a buscar las secciones meridiana del manómetro y de su cubeta.

Tomemos por eje de las x el eje de revolución de las dos superficies; por origen el punto en que el eje de revolución encuentra a la superficie de nivel normal, y por eje de las y una perpendicular (Figura 6.º).

Representemos por x e y las coordenadas de un punto de la sección meridiana del manómetro, y por x_1 e y_1 las de un punto de la sección meridiana de la cubeta.

Sea MP la posición de la superficie libre del mercurio en el manómetro, correspondiente a una presión P_x del vapor del receptáculo, sea $M'P'$ la superficie libre correspondiente del mercurio en la cubeta. Sean $OP = x$ y $OP' = -x_1$. Los volúmenes engendrados por $AOMP$ y $AA'M'P'$ deberán ser equivalentes, pues cuando el nivel del mercurio dentro del tubo ocupa la posición normal AO el de la cubeta está a nivel en AA' . Además la cantidad de mercurio que penetra dentro del tubo debe ser igual a la que sale de la cubeta. Por tanto:

$$\pi \int_0^x y^2 dx = \pi \int_0^{x_1} (y_1^2 - \rho^2) dx_1$$

Diferenciando ambos miembros con relación a x_1 tendremos:

$$y^2 dx = \frac{d \int_0^{x_1} (y_1^2 - \rho^2) dx_1}{dx_1} \cdot \frac{dx_1}{dx} \cdot dx$$

O también $y^2 dx = (y_1^2 - \rho^2) \cdot \frac{dx_1}{dx} dx$

De donde $y^2 = (y_1^2 - \rho^2) \frac{dx_1}{dx}$ (5) Fórmula en que ρ = radio exterior de la parte cilíndrica del tubo manométrico.

Establezcamos ahora la condición de que el descenso x_1 del mercurio de la cubeta sea directamente proporcional al ascenso del mercurio en el tubo, así:

$$x = kx_1 \quad \text{De donde:} \quad dx = kdx_1 \quad \text{y} \quad \frac{dx_1}{dx} = \frac{1}{k}$$

Sustituyendo en (5) tendremos: $y^2 = (y_1^2 - \rho^2) \frac{1}{k}$ De donde: $y^2 = \rho^2 + ky^2$ (6)

Mediante esta ecuación (6) tendremos conocida la sección meridiana de la cubeta cuando se conozca la del manómetro.

Tomemos cierta longitud para división de la escala manométrica, la cual tomaremos por unidad. Sea esa división $O1 = 1 - 2 = 2 - 3 = 3 - 4 \dots$ Frente de O deberá estar marcada 1 atmósfera; frente a la abscisa 1: 2 atmósferas; frente a la abscisa 2: 3 atmósferas; frente a la abscisa x se tendrán, pues, $x+1$ atmósferas. Así la presión P_x correspondiente a una abscisa x del nivel del mercurio, será: $P_x = x+1$ en atmósferas.

Por otra parte, si llamamos T_x la tensión correspondiente del aire dentro del manómetro expresada en atmósferas, y h la altura de 0^m.76 correspondiente a la presión atmosférica, pero expresada en unidades de la escala, tendremos:

$$P_x = T_x + \frac{x+x_1}{h} \quad \text{O bien, notando que} \quad x_1 = \frac{x}{k} \quad \text{resulta:} \quad P_x = T_x + \frac{(k+1)x}{kh} \quad (B)$$

Supongamos que se extiende el manómetro hasta una abscisa $R = Ok$ y que sea V el volumen total de su capacidad interior cuando el nivel del mercurio es OA . Es decir, el volumen engendrado por la rotación de $AOKS$ alrededor de Ox .

$$V = \pi \int_0^R y^2 dx$$

Llamemos V_x el volumen $MPKS$ que le queda al aire cuando el mercurio ocupa la abscisa $OP = x$.

Tendremos, según la ley de Mariotte: $\frac{T_x}{T_o} = \frac{V}{V_x}$ Y como $T_o = P_o = 1$ atmósfera, resulta: $T_x = \frac{V}{V_x}$

Sustituyendo en (B) tendremos: $P_x = \frac{V}{V_x} + \frac{(k+1)x}{kh}$ De donde, como $P_x = x+1$ queda:

$$x+1 = \frac{V}{V_x} + \frac{K+1}{kh}x \quad \text{De donde:} \quad \left[\left(\frac{K(h-1)-1}{Kh} \right) x + 1 \right] V_x = V$$

O bien, poniendo para simplificar: $a = \frac{K(h-1)-1}{Kh}$ resulta: $(ax+1) \pi \int_x^R y^2 dx = V$ (7)

De donde, diferenciando: $\pi a \int_x^R y^2 dx - \pi (ax+1) y^2 = 0 \quad \therefore \quad \pi \int_x^R y^2 dx = \frac{\pi}{a} (ax+1) y^2$

valor que sustituido en (7) da: $\frac{\pi}{a} (ax+1)^2 y^2 = V \quad \therefore \quad y^2 = \frac{aV}{\pi} \cdot \frac{1}{(ax+1)^2}$ De donde: $y = \sqrt{\frac{aV}{\pi}} \cdot \frac{1}{ax+1}$ (8)

Es también una hipérbola de asíntotas rectangulares. El valor R del límite superior será ∞ , como es fácil verlo, pues

$$V_x = \pi \int_x^R y^2 dx = Va \int_x^R \frac{dx}{(ax+1)^2} = Va \int_x^R \frac{d(ax+1)}{a(ax+1)^2} = -V \int_x^R \frac{1}{ax+1} \therefore V = \int_x^R \frac{1}{ax+1} = V \left(\frac{1}{ax+1} - \frac{1}{aR+1} \right)$$

Haciendo $x=0$ se deberá tener $V_0 = V$. Y por tanto: $1 = 1 - \frac{1}{aR+1}$ De donde: $R = \infty$.

Como en el presente caso son aplicables las notas que hemos hecho sobre el mismo asunto referente al primero, no es necesario dar al manómetro altura infinita, sino únicamente una altura H que uno fijará por el número de graduaciones que se quiera obtener, y terminarlo por una cavidad de cualquier forma, cuyo volumen sea: $V_H = \frac{V}{aH+1}$.

Obtenida por la fórmula (8) la ecuación de la sección meridiana, la de la cubeta será (9)

$$y_1^2 = \rho^2 + \frac{aKV}{\pi} \cdot \frac{1}{(ax+1)^2} \quad \text{O poniendo en lugar de } x \text{ su valor } Kx, \text{ tendremos:}$$

$$y_1^2 = \frac{aKV}{\pi} \cdot \frac{1}{(aKx_1+1)^2} + \rho^2 \quad (9)$$

El valor de ρ es, llamando e el espesor del vidrio en la parte cilíndrica del manómetro e y y_0 la ordenada OA

$$\rho = e + y_0 \quad \therefore \quad \rho = e + \sqrt{\frac{aV}{\pi}}$$

Discusión.—Sustituyendo en (8) y (9) en lugar de a su valor tendremos para las secciones meridiana del manómetro y su cubeta: (8 bis)

$$y = \sqrt{\frac{(K(h-1)-1)V}{\pi Kh} \cdot \frac{1}{\frac{K(h-1)-1}{Kh} x + 1}} \quad \therefore \quad y_1^2 = \frac{K(h-1)-1}{\pi h} \cdot V \cdot \frac{1}{\left(\frac{K(h-1)-1}{h} x_1 + 1 \right)^2} + \rho^2 \quad (9 \text{ bis})$$

Para que las ecuaciones representen curvas reales es necesario que se tenga:

$$Kh - K - 1 > 0 \quad \text{ó} \quad h > 1 + \frac{1}{K}$$

Así, la condición que debe llenar la unidad de la escala será, llamando su longitud en metros z

$$\frac{0.76}{z} > 1 + \frac{1}{K} \quad \text{ó} \quad 0.76 > z \left(1 + \frac{1}{K} \right) \quad \text{Y por tanto:} \quad z < \frac{0.76}{1 + \frac{1}{K}}$$

Si $Kh - K - 1 = 0$, se tendría $y=0$ y el manómetro no sería practicable a menos que se tomara $V = \infty$, en cuyo caso sería $y = \infty \times 0$ valor indeterminado; la sección podría tomar cualquier forma, y para llenar la condición de $V = \infty$ basta dejar su extremidad libre. Este caso corresponde, pues, al de un manómetro de aire libre: en efecto, para que la presión sea de una atmósfera el nivel tendrá que ascender 1 división sobre el nivel normal, y la diferencia de nivel total será, llamando z la longitud de una división:

$$z + \frac{z}{K} \quad \text{Y como} \quad z = \frac{0.76}{1 + \frac{1}{K}} \quad \text{tendremos:} \quad \frac{0.76}{1 + \frac{1}{K}} + \frac{0.76}{K-1} = 0.76$$

lo que corresponde a dicho caso.

Por último, si $Kh - K - 1 < 0$, la ecuación (8) representará una curva imaginaria, no podrá construirse manómetro con divisiones de tales dimensiones. En efecto, llamando z la longitud de una división, tendríamos en el presente caso:

$$z > \frac{0.76}{1 + \frac{1}{K}} \quad \text{De donde} \quad z + \frac{z}{K} > 0.76$$

y para que el nivel del mercurio marcara $n+1$ atmósferas sería necesario que ascendiera n divisiones, en cuyo caso la altura del nivel del mercurio dentro del tubo, sobre el nivel normal, sería nz , y el descenso del nivel de la cubeta respecto del mismo nivel normal sería $\frac{nz}{K}$. Lo que da un desnivel total

$n \left(z + \frac{z}{K} \right) > 0.76n$. Por sólo este desnivel la presión habrá crecido en n atmósferas, y como

$T_n + n \left(z + \frac{z}{K} \right) = n+1$ resulta que $T_n < 1$ atmósfera. Pero la tensión inicial siendo de una atmósfera, resulta que dicha tensión debería disminuir con el ascenso de la columna mercurial, lo cual no podrá verificarse según la ley de Mariotte.

Modificación.—Podemos suprimir la cubeta y dar al tubo manométrico, abajo del nivel normal, una forma cualquiera yK (Figura 7.^a) y en seguida encorvarlo en $HbBK$ para empalmarlo en H con otro tubo de forma especial determinada por la condición de que el descenso OP' del mercurio en éste sea proporcional al ascenso OP en el tubo manométrico. Para esto llamemos x e y las coordenadas de un punto M del tubo manométrico, y x_1 e y_1 las del punto M' correspondiente del tubo mercurial. La cantidad de mercurio contenida en la porción OM del tubo manométrico debiendo ser igual al espacio vacío A_1M' del tubo mercurial, resultará que el área engendrada por la rotación de $MPOy$ alrededor de Ox debe ser igual al área engendrada por la revolución de $OA_1M'P'$ alrededor de Ox_1 . Se tendrá:

$$\pi \int_0^x y^2 dx = \pi \int_0^{x_1} y_1^2 dx_1 \quad \text{De donde:} \quad y^2 dx = y_1^2 \frac{dx_1}{dx} \quad \therefore \quad y^2 = y_1^2 \frac{dx_1}{dx}$$

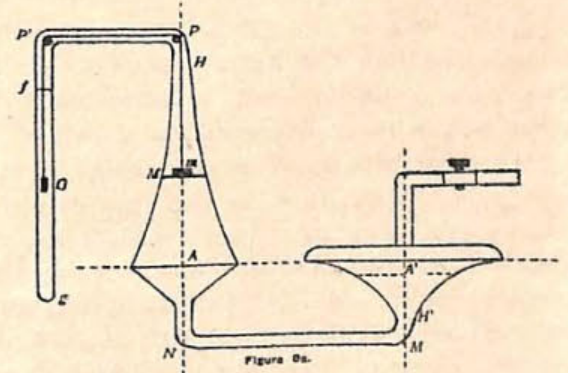
Y para que la curva de la sección meridiana del tubo esté dada por la misma ecuación (8 bis) pondremos:

$$x = Kx_1 \quad \therefore \quad \frac{dx_1}{dx} = \frac{1}{K} \quad \text{Y por tanto:} \quad y_1^2 = Ky^2 \quad \text{O bien} \quad y_1 = \sqrt{Ky}$$

Sustituyendo en lugar de y su valor (8 bis), y en lugar de x su valor en función de x_1 tendremos:

$$y_1 = \sqrt{\frac{(K(h-1)-1)V}{\pi h} \cdot \frac{1}{\frac{K(h-1)-1}{h} x_1 - 1}}$$

Háganse de hierro colado los dos tubos hiperbólicos AH y $A'H'$ lo mismo que el tubo comunicante $H'MNA$. Reemplácese la cavidad esférica por otra del tubo encorvado $PP'fG$ del cual una parte $PP'f$ es de hierro y otra fG un tubo de vidrio graduado con graduaciones iguales, el cual pueda atornillarse y desatornillarse en f . Un flotador de hierro m está sostenido por un hilo que pasa por dos poleas P y P' y termina por un contrapeso G que sirve de indicador de nivel. (Véase Figura 8.^a). La capacidad $PP'fG$ disminuida del volumen del contrapeso, de la parte externa del flotador, de las poleas y del hilo, debe ser equivalente al volumen que hemos calculado para la esfera terminal. El tubo graduado fG puede ser separado y limpiado, y puede hacerse una graduación de metal, y además pueden hacerse varios tubos iguales para reemplazarlos en caso de ruptura.



Nota.—En la mayor parte de los problemas de Análisis infinitesimal el método que se sigue consiste en establecer una relación entre la diferencial de la función, o una o varias de sus derivadas, y la variable o variables de que depende, y en seguida se determina la función por la integración de la ecuación o ecuaciones diferenciales establecidas.

En el presente caso el método seguido es especial, pues la ecuación que se establece se refiere a una integral de una función desconocida que se determina por la eliminación entre la ecuación establecida y su diferencial.

NOTA DE LA DIRECCION.—Entre los numerosos trabajos elementales que como aplicación geométrica presentó Garavito durante sus últimos años de estudio en la Facultad de Matemáticas e Ingeniería de Bogotá, hemos escogido varios para su reproducción en esta Revista, con el propósito de dar a los lectores de ella una idea referente a las altas capacidades analíticas del sabio profesor colombiano, y que se pusieron de manifiesto desde sus primeros ensayos en las aulas universitarias. Ciertamente, estos trabajos no tienen mayor importancia: los consideramos como ejercicios de cálculo afortunados y no como estudios de investigación científica. Pero como nos hemos propuesto exhibir aquí el conjunto de la obra de Garavito, antes de abordar su labor fundamental de Mecánica celeste, parecenos que tal vez ellos no están fuera de lugar. Próximamente insertaremos en la serie de trabajos de Garavito otros de índole semejante, agrupándolos todos bajo el título común de "Entretenimientos matemáticos".