

ESTUDIO MATEMÁTICO DEL DISEÑO PRECOLOMBINO DE LA ESPIRAL EN EL ARTE RUPESTRE DEL NOROCCIDENTE DEL MUNICIPIO DE PASTO (COLOMBIA)

Por

Armando José Quijano Vodniza¹

Resumen

Quijano Vodniza A. J.: Estudio matemático del diseño precolombino de la espiral en el arte rupestre del noroccidente del municipio de Pasto (Colombia). Rev. Acad. Colomb. Cienc. **34** (130): 53-69, 2010. ISSN 0370-3908.

La espiral es el diseño precolombino que con mayor frecuencia aparece en el arte rupestre de Nariño, sin embargo, hasta el momento no se han determinado las propiedades geométricas de esta representación. En este sentido, se realizó un estudio estadístico de una muestra de 44 espirales representadas en petroglifos del sector noroccidental del Municipio de Pasto, en el cual se indagó sobre: el número de espirales de acuerdo con la dirección de su giro, dimensiones de las espirales, tramos y números de vueltas de los grabados y el tipo de espiral trazada. La investigación permitió determinar que el diseño en cuestión corresponde a una espiral de dos centros, lo cual arroja las primeras evidencias a favor de la existencia de patrones geométricos en la elaboración de estos vestigios arqueológicos.

Palabras clave: arte rupestre, diseño precolombino, etnomatemáticas, espiral de dos centros.

Abstract

The spiral figure is the Pre-Columbian design that appears most frequently on the rock art in Nariño, however, until now the geometrical properties have not been determined by this representation. Thus, a statistical study is carried out of a sample of the 44 spirals represented in the petroglyphs of the north-western sector of the Municipality of Pasto, in which the following is researched: number of spirals according to the direction of their movement, dimensions of the spirals, lines and number of turns of the engravings and the type of the spiral traced. The research allowed us to determine that the design in question corresponds to a spiral of two centres, which sheds light on the first evidence in favour of the existence of geometrical patterns in the elaboration of these archaeological vestiges.

Key words: rock art, pre-columbian design, ethnomathematics, spiral of two centres.

¹ Director del grupo de investigación Inti Rumi, Institución Universitaria CESMAG, San Juan de Pasto, Colombia. Correo electrónico: ajquivo@yahoo.com.co

Introducción

En la zona andina del actual Departamento de Nariño se ha encontrado una cantidad importante de obras rupestres, tanto a nivel de grabados (petroglifos) como de pinturas (pictografías), elaboradas por los primeros pobladores de esta región de Colombia, las cuales se ubican en los territorios habitados en la época prehispánica por las etnias de los Pastos y los Quillacingas.

Los registros adelantados por investigadores como: **Justino Mejía & Mejía** (1934), **Wenseslao Cabrera** (1966), **Oswaldo Granda Paz** (1983), **Ana María Groot** (1991) y **Edgar Rodríguez** (1992) permiten identificar la presencia frecuente de la figura de la espiral en estas obras precolombinas. Efectivamente, la revisión bibliográfica y las visitas adelantadas en la década de los noventa por el autor a algunos de estos petroglifos y pictografías confirman que de las 76 obras rupestres identificadas, en 42 de ellas aparece por lo menos una vez el trazo de la espiral, encontrándose, incluso, que en algunos sitios esta representación se repite hasta 17 veces sobre la superficie de una misma masa rocosa, como sucede con un petroglifo registrado por **Cabrera** en el sector de Pandiaco, hoy barrio de la ciudad de San Juan de Pasto.

La presencia recurrente del diseño de la espiral en el arte rupestre de Nariño sugiere, sin lugar a dudas, el importante valor simbólico de esta representación para sus autores; sin embargo, hasta el momento no se ha realizado ningún tipo de estudio que permita conocer los motivos que tuvieron estos pueblos para preferir esta iconografía, ni siquiera se han considerado en detalle las características geométricas de esta figura precolombina, como: dimensión promedio de las espirales, separación entre tramos o tipo de espiral representada.

Sin lugar a dudas, este desconocimiento de las propiedades matemáticas de los diseños representados en las obras rupestres, que se manifiesta tanto en Nariño como en el resto del país, se debe al planteamiento sostenido por unos algunos autores, quienes han manifestado la imposibilidad de encontrar *patrones* dentro de los diferentes motivos que se han grabado y pintado en las piedras, tachándolos como meras expresiones incoherentes de *mentes primitivas*:

Incurriríamos en cansadas repeticiones si continuáramos describiendo tantos y tantos petroglifos cuyas copias hemos tenido a la vista, y cuyo examen sería enteramente infructuoso. Nada pueden revelar a la ciencia histórica esos ensayos de dibujos de ornamentos, esas figuras informes de animales y

esos garabatos semejantes a los que traza un niño travieso e inexperto. Jamás se observa en ellos el orden ni el encadenamiento que son indicio cierto de una escritura cualquiera. No reproducen siquiera las más sencillas escenas de la vida de los indios, *v.gr.*, una ceremonia religiosa, una pareja humana, una cacería, dos guerreros que se baten, etc. (...). No supieron pintarlos ni grabarlos en las piedras, en las que tampoco trazaron la figura de sus caciques y personas principales, ni siquiera las del venado, las aves y las fieras de su selva. Mudos en razón misma de su origen, condenados esos signos, por la mano inconsciente que los trazó, a un silencio eterno, jamás podrá la vara mágica de la ciencia hacerlos hablar (**Restrepo**, 1972, p. 212).

No obstante, en el presente estudio se pretende refutar esta afirmación a partir del estudio estadístico de una muestra de espirales halladas en obras rupestres del Municipio de Pasto, ubicado en la parte central de los Andes de Nariño. Ciertamente, con el surgimiento en los últimos años de la corriente disciplinar de la Etnomatemática, la postura de considerar los diseños precolombinos como manifestaciones rudimentarias de pueblos atrasados ha comenzado a cambiar.

Desde que Ubiratan D'Ambrosio presentó la base teórica de la Etnomatemática durante la sesión inaugural del *Quinto Congreso Internacional de Matemática Educativa en Adelaida* (evento celebrado en Australia en el año de 1.984), la comunidad académica internacional y nacional se ha interesado en investigar las diferentes ideas y prácticas matemáticas que cada cultura ha desarrollado desde tiempos prehistóricos:

A la hora en que el australopiteco escogió y cortó un pedazo de piedra con el objetivo de descarnar un hueso, su mente matemática fue revelada. Para seleccionar la piedra es necesario evaluar sus dimensiones y para cortar el requisito necesario y suficiente que le permitía lograr su objetivo... consistía en evaluar y comparar las dimensiones [esta actividad] es una de las manifestaciones más elementales del pensamiento matemático (**Rosa & Orey**, 2005, pp. 364-365).

Al mismo tiempo que el conocimiento matemático progresaba en las civilizaciones del Antiguo Continente, en América las comunidades indígenas “también desarrollaban maneras específicas de conocer, entender, comprender y trabajar con el propio medio ambiente” (**Rosa & Orey**, 2005, p. 367), alcanzando niveles muy significativos como sucedió con la civilización Maya, una de las primeras culturas

que utilizó el número cero. Desafortunadamente, con la llegada de los conquistadores españoles al Nuevo Mundo en los siglos XV y XVI, gran parte de estos logros matemáticos se perdieron, debido a que los europeos que arribaron a este territorio, en su afán de riquezas materiales y de poder, despreciaron a las comunidades indígenas que habían florecido durante cientos y miles de años en América e impusieron su propia cultura, incluyendo el pensamiento matemático occidental: “aunque la civilización precolombina de América poseía conocimiento matemático..., se realizó un esfuerzo para transferir las matemáticas desde las tradiciones europeas a las colonias” (**D’Ambrosio**, 1999, p. 347).

Uno de los pocos testimonios de la época Colonial que describe los logros matemáticos alcanzados por los pueblos indígenas (**D’Ambrosio**, 1999), y el cual afortunadamente ha perdurado hasta el presente, es la obra del sacerdote franciscano Juan Diez Freyle, quien en el año 1.556 publicó en la ciudad de México “el primer libro de aritmética del Nuevo Mundo, titulado: *Sumario compendio de las cuentas de plata y oro que en los reinos del Perú son necesarias a los mercaderes y todo genero de tratantes: con algunas reglas tocantes al aritmética*” (**Rosa & Orey**, 2005, p. 369).

A pesar de tal sometimiento cultural por más de quinientos años, algunas prácticas de medición, cálculo y conocimiento matemático tradicional todavía prevalecen en algunas comunidades nativas, como sucede con los grupos étnicos de los Andes y la Amazonía (**D’Amore**, 2003); así, por ejemplo, “es común ver a los indígenas de América utilizando números indo-arábigos, pero realizando las operaciones de abajo a arriba, aduciendo que ésta es la manera en que crecen los árboles” (**D’Ambrosio**, 1999, p. 349), así mismo, “andando o conduciendo se memorizan rutas, en muchos casos optimizando trayectorias, lo cual es una costumbre de naturaleza matemática” (**D’Ambrosio**, 1999, p. 349).

En este sentido, se podría definir a la Etnomatemática como aquel campo de la ciencia que permite indagar: a) la historia de las ideas matemáticas que se encuentran en contextos culturales específicos y las cuales son transmitidas a través de las generaciones (**Rosa & Orey**, 2005; **Rosa**, 2008); b) los procesos de generación, organización, difusión y aplicación de los conocimientos matemáticos en dichos sistemas culturales (**Ortiz-Franco**, 2004); c) las técnicas, habilidades, al igual que las prácticas de contar, medir, pensar, ordenar, clasificar, inferir y calcular empleadas por los grupos culturales (**D’Ambrosio**, 1999; **Ortiz-Franco**, 2004); y d) los esquemas utilizados para desarrollar un sistema

numérico por medio de patrones de medida que corresponden a las necesidades culturales particulares, poblacionales, de producción y de intercambio (**Higuera**, 2008).

Un estudio etnomatemático muy importante se publicó en el libro *Native American Mathematics*, editado por Michael Closs de la Universidad de Texas, “el cual se enfoca en el desarrollo matemático indígena del Nuevo Mundo” (**Closs**, 1986, preface). Así mismo, otro trabajo que muestra claramente el nexo entre matemáticas, antropología e historia es *Ethnomathematics: a multicultural view of mathematical ideas* de Ascher (citado por **Ortiz-Franco**, 2004), en donde se exploran las ideas matemáticas de culturas como los incas, aztecas y mayas, relacionadas con sus prácticas de numeración, lógica, configuraciones espaciales y organización.

Con respecto a las destrezas matemáticas de las comunidades indígenas del actual Departamento de Nariño, se destaca el artículo: *Las proporciones del Sol de los Pastos*, elaborado por **Albis** y publicado en 1.987 en el *Boletín de Matemáticas* de la Universidad Nacional de Colombia, en donde se estudian las proporciones geométricas del motivo prehispánico de la estrella de ocho puntas inscrito en dos círculos concéntricos (denominado en la región como el *Sol de los Pastos*), y el cual está presente en el arte rupestre, la cerámica prehispánica y los tejidos artesanales de los andes del sur de Colombia y el norte del Ecuador.

Metodología

En la presente investigación se visitaron en total doce sitios de interés en la zona noroccidental del Municipio de Pasto, de los cuales once tenían manifestaciones de arte rupestre y un caso –en el sector de San Juan Pamba, en Genoy–, correspondía a una piedra con una serie de surcos formados de manera natural. Dos obras rupestres se seleccionaron por ser prácticamente una de las últimas expresiones de este tipo de vestigios arqueológicos que quedan en la zona urbana de la actual ciudad de San Juan de Pasto: uno ubicado en el barrio de Pandiaco y el otro en el barrio de Torobajo.

Para definir los otros lugares se realizaron una serie de talleres con los habitantes de los corregimientos de Mapachico y de Genoy, en los cuales participaron personas que tenían conocimiento sobre este tipo de bienes culturales. Los asistentes elaboraron unos mapas parlantes con el fin de ubicar sobre pliegos de papel periódico los yacimientos arqueológicos con grabados o pinturas rupestres, así como los diferentes diseños que los pobladores recordaban haber visto en estas obras rupestres.

El primero de ellos se efectuó en la Escuela de Mapachico, el día sábado 9 de junio del 2007, entre las 6 de la tarde y las 8:30 de la noche, con la participación de las siguientes personas: Irma Vergara (Corregidora de Mapachico), Marcionila Botina, Luís H. Figueroa García, Lourdes Ortiz, Norberto Ortiz y Nicanor Criollo. Como resultado de este taller se identificaron las siguientes obras rupestres: El pictógrafo de El Higuieron, el petroglifo de la Gran Espiral, el petroglifo de la Vuelta Larga y la cueva del padre Francisco de la Villota.

Una semana después, el sábado 16 de junio, se adelantó el mismo taller en la Casa de la Junta Comunal de Genoy Centro, entre las 4:30 de la tarde y la 8:30 de la noche, con la participación de las siguientes personas: Célimo Criollo Carlosama, Diógenes Jiménez Villota, José Orlando Criollo Criollo, Crisóstomo Romualdo Criollo Villota, Juan Pablo Guevara Portilla, Héctor Miguel Jiménez, Quintín Arnulfo Luna Figueroa, José Francisco Yaqueno y Leonso Hernando Botina Jiménez.

Los resultados de este taller permitió identificar siete sitios (Figura 1), denominados por los asistentes como las piedras de: los Játivas, Turguaico, San Juan Pamba, Chasquisca, Tomates y El Edén (conformado éste último por dos petroglifos). Por otro lado, el petroglifo del Mantel de Piedra (Figura 2), que completa la muestra de obras rupestres estudiadas, fue descubierta por el grupo de investigación Inti Rumi en el momento que se hacía el reconocimiento del petroglifo de Tomates.

Tabla 1. Motivos representados en las obras rupestres visitadas

Motivos	Frecuencia absoluta	Frecuencia relativa
Figuras geométricas:		
Espirales	80	58,40%
Cuadriláteros	8	5,80%
Círculos	4	2,90%
Líneas rectas	4	2,90%
Líneas curvas	3	2,20%
Figuras zoomorfas:		
Monos	1	0,70%
Otros diseños de animales	5	3,60%
Figuras antropomorfas	3	2,20%
Figuras antropozoomorfas	1	0,70%
Canales	9	6,60%
Cavidades circulares (aljueros)	10	7,40%
Diseños indescifrables	9	6,60%
Total	137	100%

Mediante la técnica de calco o *frottage* se consiguieron imágenes de las obras rupestres en escala 1:1, es decir, de igual tamaño a los diseños presentes en la roca, respetando el trazo original de los grabados, e incluso, de las particularidades estructurales de las piedras. De manera más precisa, el *frottage* se realizó utilizando tiras de tela de interlón, de una longitud igual a la longitud de la pared de roca y con ancho comercial de 1,5 metros, las cuales se superpusieron sobre la superficie de la roca para cubrir todo su ancho. Luego, sobre la tela, se aplicó un material que tenía la propiedad de dejar una impronta sobre el interlón con los diferentes diseños de la obra rupestre, debido al efecto de la presión que los integrantes del grupo de investigación efectuaron sobre la tela colocada encima de los grabados. De esta manera, se obtuvieron negativos de las obras rupestres, sobre los cuales se midieron cuidadosamente las características de 44 de las espiras grabadas en los sitios visitados que todavía conservan su diseño original, teniendo el cuidado de no producir ningún tipo de daño sobre los petroglifos.

Resultados

A partir de la información recopilada en cada uno de los sitios visitados se puede confirmar que efectivamente el diseño que con mayor frecuencia aparece en las obras rupestres ubicadas en la zona noroccidental del Municipio de Pasto es la espiral, con el 58,4% (Tabla 1).

El diseño de la espiral corresponde a una curva plana y abierta que da vueltas indefinidamente alrededor de un punto denominado origen, alejándose de él o aproximándose (Trejos, 2008); y dependiendo del giro que hacen, éstas se clasifican como *dextrógiras*, cuando viran hacia la derecha, o *levógiras*, cuando lo hacen hacia la izquierda (Figura 3).

Aplicando la regla de la mano derecha que se utiliza en el estudio del movimiento circular, en la espiral *dextrógira* el dedo pulgar indica hacia fuera del plano que contiene el diseño, mientras que los cuatro dedos restantes siguen el sentido de las vueltas que se pliegan hacia el origen; por el contrario, en la espiral *levógira* el dedo pulgar señala hacia adentro de dicho plano.

En el caso de las 44 espirales examinadas en el sector noroccidental del Municipio de Pasto, 23 de ellas son *dextrógiras* (52,3%), mientras que 21 son *levógiras* (47,7%), difiriendo los dos valores en el 4,6%.

La Tabla 1 también permite inferir la preferencia de los diseñadores de las obras rupestres por las figuras geométricas, por cuanto 99 de los motivos corresponden a esta categoría, representando el 72,2% del total de la muestra.

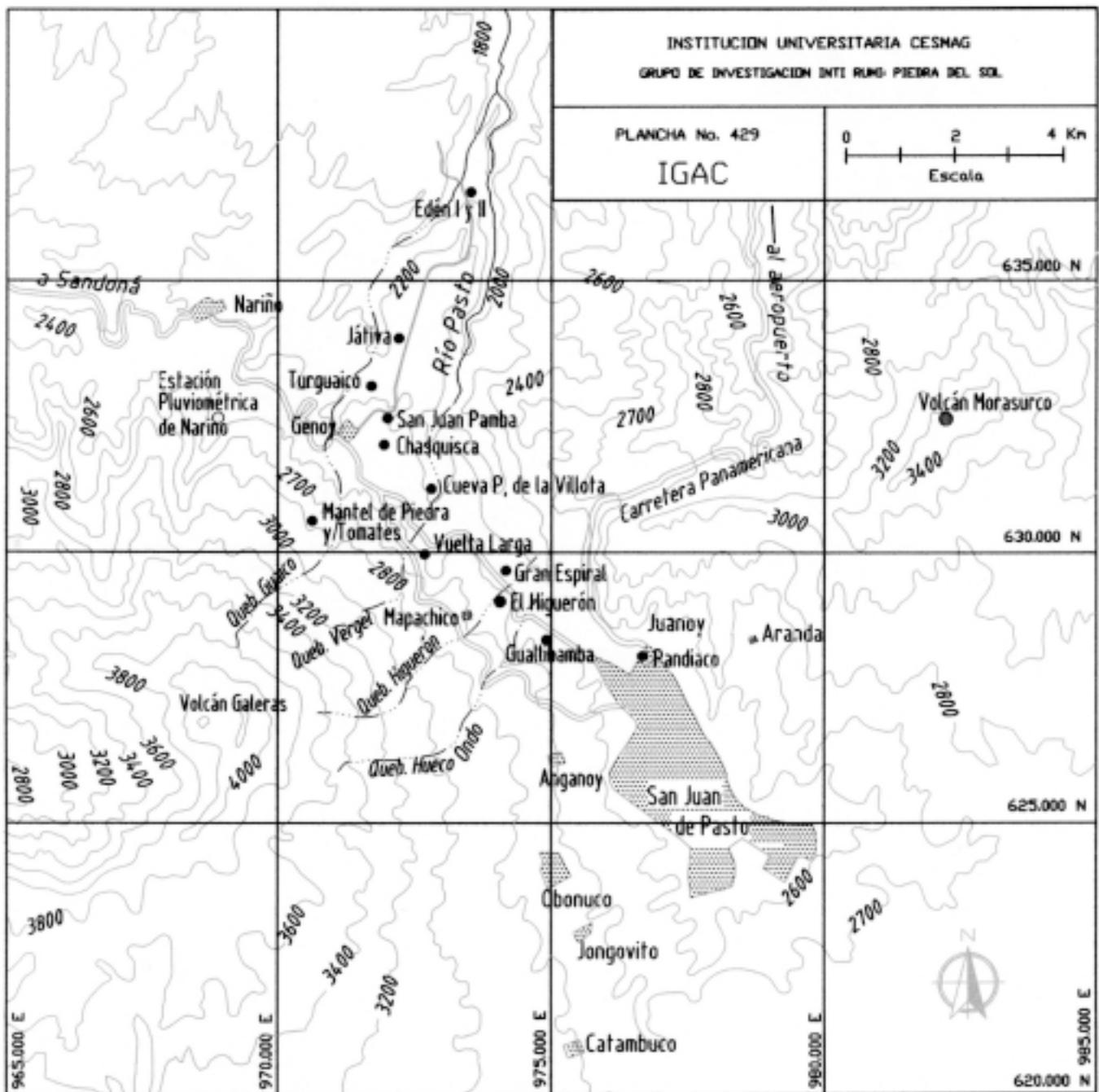


Figura 1. Ubicación de las obras rupestres estudiadas.

Por otro lado, con la utilización de una regla perfectamente graduada (escalímetro) se procedió a medir con todo detalle las dimensiones de las espirales sobre los *frottages* realizados, valiéndose para ello de un sistema de referencia cartesiano formado por dos ejes perpendiculares entre sí (X,Y) que pasan por el *origen* del grabado (Figura 4).

En este sentido, en el anexo 1 se presenta el tamaño de las diferentes espirales en cada uno de los ejes ortogonales, al final del cual se indica: el número total de datos (n), la mayor dimensión de la espiral en la dirección respectiva (L máx.), la menor dimensión de la espiral en la dirección respectiva (L mín.), el rango (R), la media aritmética (m), la desviación

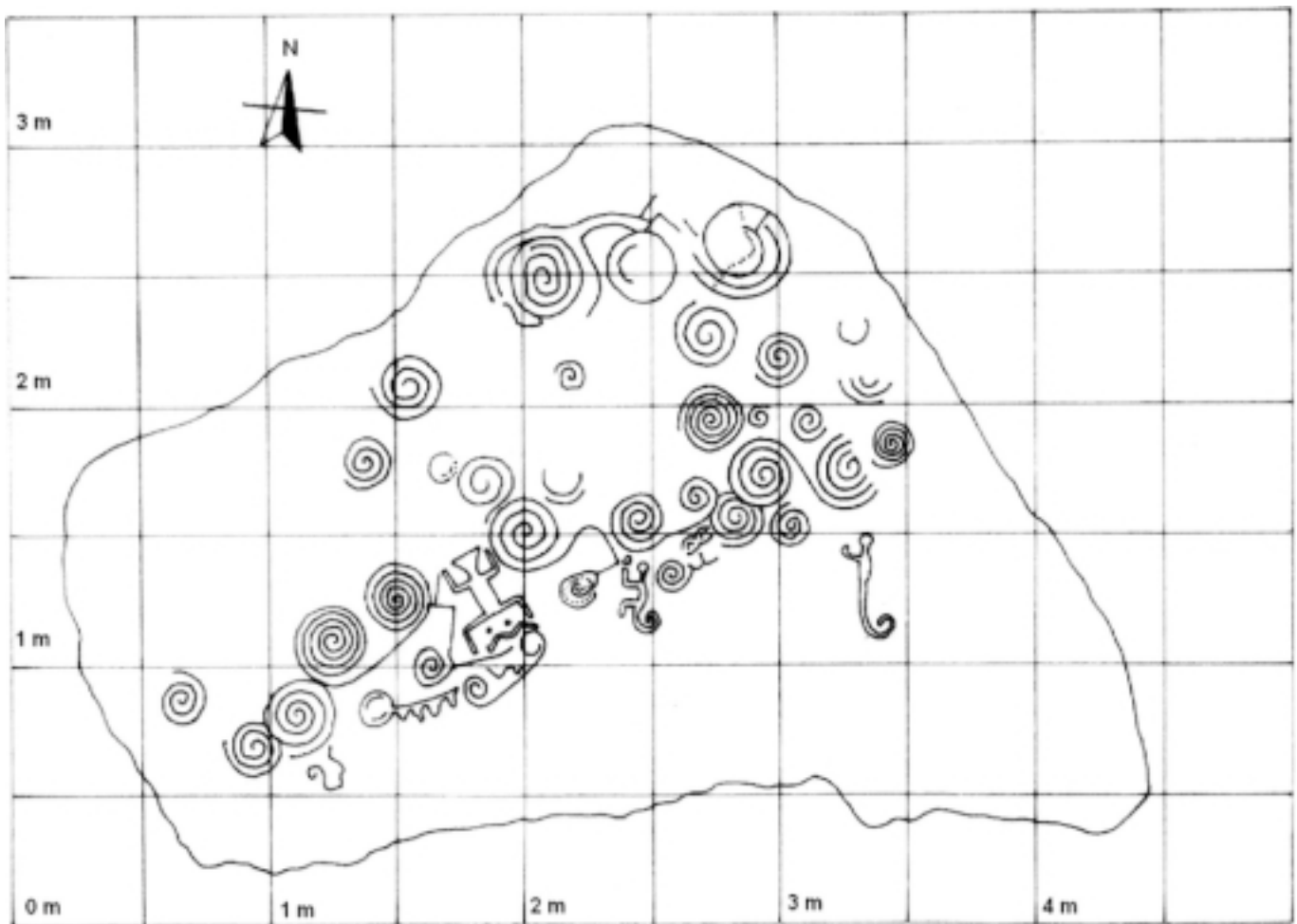


Figura 2. Petrogifo Mantel de Piedra (Municipio de Pasto).

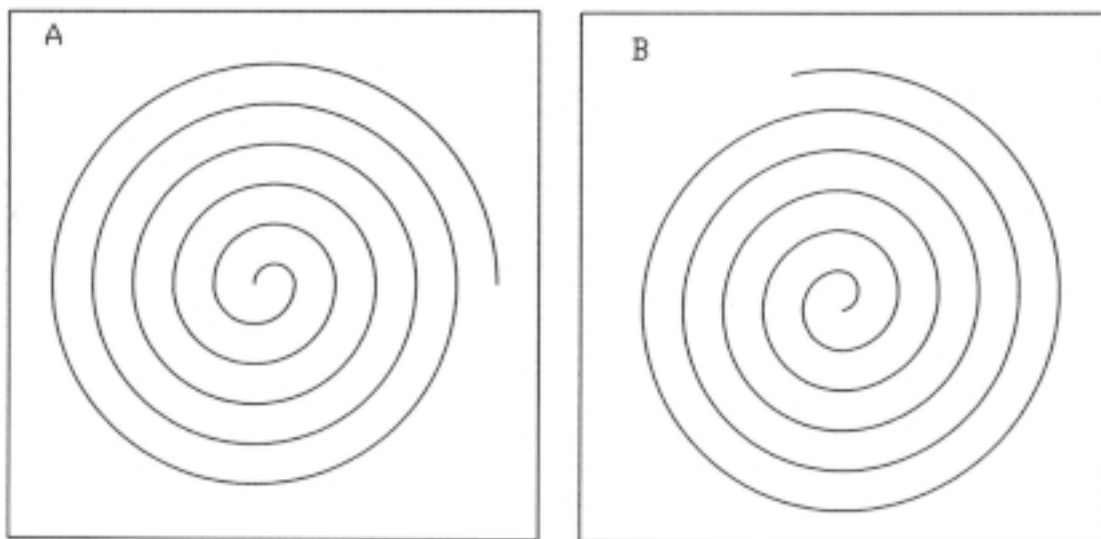


Figura 3. Tipos de espirales de acuerdo a la dirección del giro: *dextrógiro* (A) y *levógira* (B).

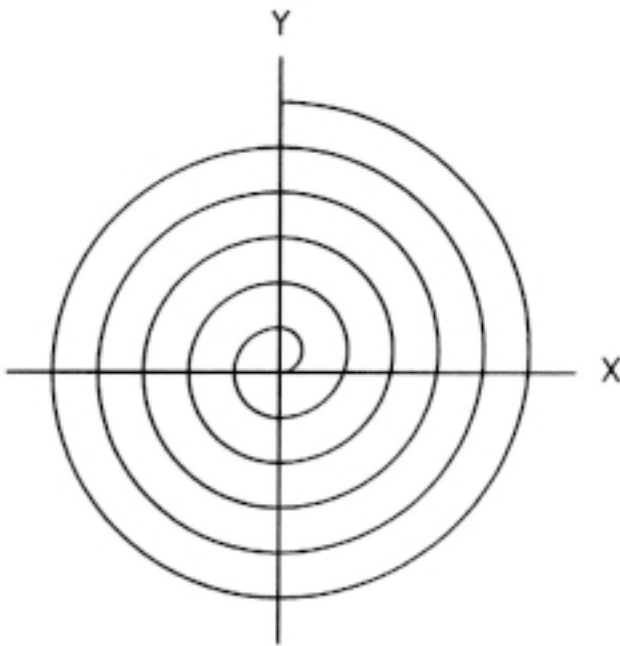


Figura 4. Sistema de referencia cartesiano adoptado para la medición de las espirales.

estándar (S), el coeficiente de variación o de dispersión de Pearson (V) y el coeficiente de uniformidad de los datos (U).

De esta información² se puede deducir que la espiral de mayor dimensión en las dos direcciones corresponde al motivo número uno, del conjunto uno, localizado en el petroglifo de Turguaico, con 32,8 centímetros de longitud en la dirección X y 35,2 centímetros en la dirección Y; mientras que la espiral más pequeña corresponde al motivo 35 del petroglifo Mantel de Piedra, que tiene una longitud de 9,10 centímetros en la dirección X y 6,75 centímetros en la dirección Y, siendo la diferencia entre el valor máximo y el valor mínimo de 23,70 centímetros y de 28,45 centímetros en cada una de las dos direcciones, respectivamente.

En promedio, las espirales estudiadas tienen un tamaño de 20,41 centímetros en la dirección X y 20,63 centímetros en la dirección Y, siendo su desviación estándar de 6,36 y 6,45 centímetros para cada uno de los ejes ortogonales; por este motivo, la colección de datos alcanza una misma dispersión o variación promedio del 31,3 % y un grado de uniformidad del 68,8 %. Este tamaño promedio se considera pequeño y se justifica por el interés que tenían los indígenas de cubrir la superficie de la roca con la mayor cantidad

de diseños, especialmente con otras espirales. De esta manera, las volutas de mayor tamaño se han grabado como motivos aislados en alguna de las caras de la piedra.

Por otro lado, a partir del punto origen también se midieron los diferentes tramos de cada una de las espirales, los cuales se denominaron con las letras minúsculas: *a, b, c, d, e, f, g, h, i, j, k, l, m, n, o, p, q, r, s, t, u* (figura 5 y anexos 2 a 5). Los tramos *a, b, c* y *d* corresponden a la primera vuelta de la espiral; los tramos *e, f, g* y *h* a la segunda vuelta; *i, j, k* y *l* a la tercera vuelta; *m, n, o* y *p* a la cuarta vuelta; *q, r, s* y *t* a la quinta vuelta y *u* al primer tramo de la sexta vuelta.

El análisis de los datos permite determinar que la separación máxima hallada entre dos vueltas de una espiral fue de 7,90 centímetros, mientras que la menor separación fue de 1,45 centímetros; situación condicionada directamente por el tamaño total del grabado e inversamente por el número de giros de la misma. Así mismo, las espirales medidas en la zona de estudio tienen, en promedio, un tramo de 3,37 centímetros en cualquiera de las direcciones.

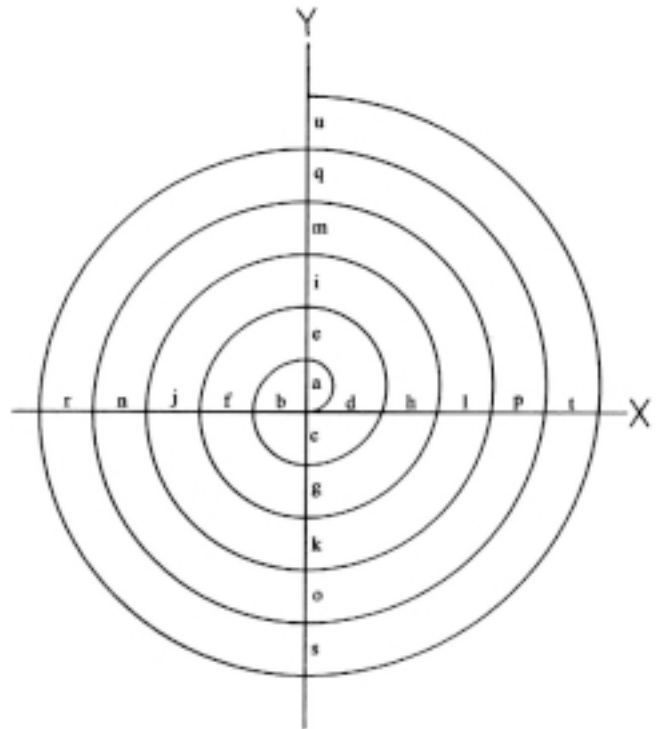


Figura 5. Tramos de la espiral medidos con un escalímetro.

² En el caso de las espirales identificadas con los número 18 y 28 en el Anexo 1, no se pudo determinar la dimensión total de la figura en ambas direcciones, debido al mal estado de conservación de los grabados rupestres.

El 95,5% de las espirales analizadas tienen el giro completo correspondiente a la primera vuelta, el 84,1% poseen dos vueltas completas y cerca de la mitad de las volutas (el 56,8%) se desarrollan hasta el tramo k de la tercera vuelta, es decir, alcanzan $2\frac{3}{4}$ vueltas. El número de espirales con tres, cuatro y cinco vueltas completas es de 20 (45,5%), 9 (20,5%) y 2 (4,5%), respectivamente. Sólo una espiral grabada en el petroglifo del Guallibamba se desarrolla hasta alcanzar el primer tramo de la sexta vuelta (Tabla 2).

Tabla 2. Distribución de frecuencias por vueltas y tramos de las espirales

Vuelta de la espiral	Tramo	Frecuencia absoluta	Frecuencia relativa (%)
1	a	43	97,7
	b	43	97,7
	c	43	97,7
	d	42	95,5
2	e	42	95,5
	f	43	97,7
	g	42	95,5
	h	37	84,1
3	i	33	75,0
	j	30	68,2
	k	25	56,8
	l	20	45,5
4	m	16	36,4
	n	12	27,3
	o	11	25,0
	p	9	20,5
5	q	8	18,2
	r	5	11,4
	s	4	9,1
	t	2	4,5
6	u	1	2,3

Ahora, a partir de los promedios aritméticos obtenidos para cada tramo, se ha elaborado la Figura 6 con el apoyo del software de dibujo técnico *AutoCAD*, la cual corresponde a la espiral promedio de todos los 44 motivos considerados en este estudio.

Con el propósito de determinar a qué tipo de espiral corresponde la espiral promedio mostrada en la Gráfica 6, en las Figuras 7, 8, 9 y 10 se representa la diferencia (medida en centímetros) entre los valores obtenidos para cada tramo de giro de la espiral promedio y los respectivos valores de tramo, considerando las espirales más conocidas: aritmética o de Arquímedes, logarítmica, hiperbólica y de

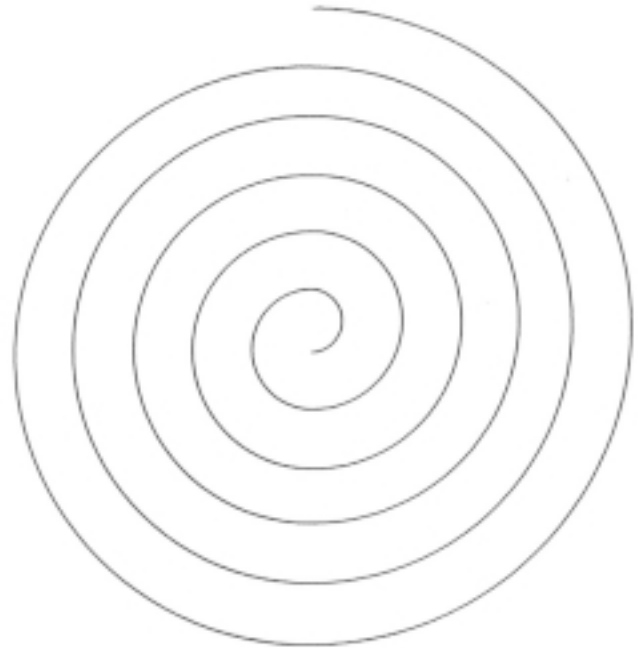


Figura 6. Espiral promedio elaborada con el software *AutoCAD* a partir de las medias aritméticas de cada uno de los tramos de los 44 motivos analizados.

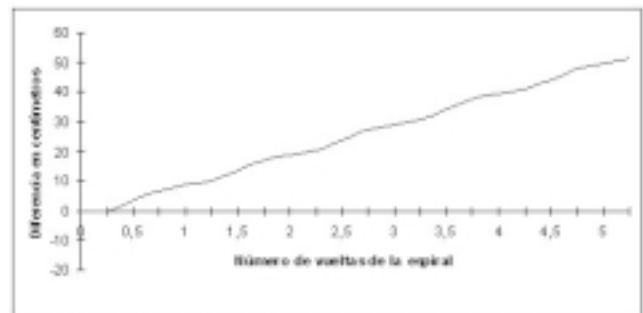


Figura 7. Diferencia entre la espiral aritmética y la espiral promedio.

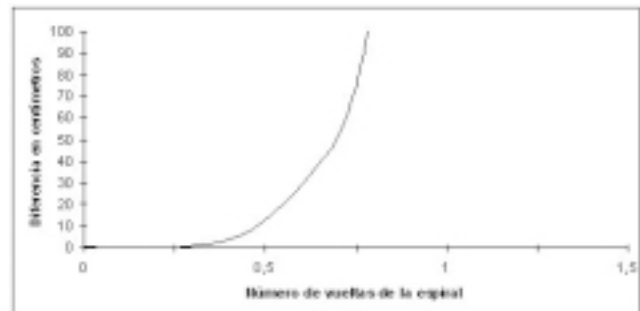


Figura 8. Diferencia entre la espiral logarítmica y la espiral promedio.

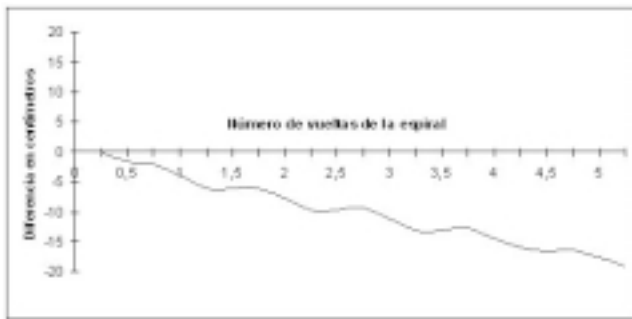


Figura 9. Diferencia entre la espiral hiperbólica y la espiral promedio.

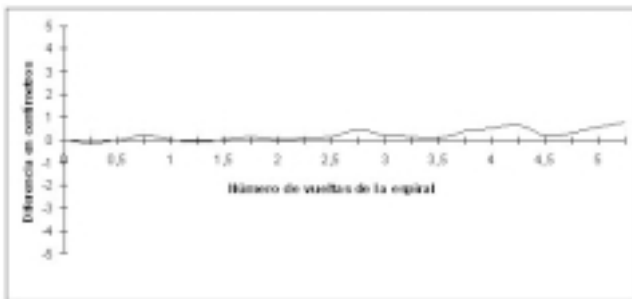


Figura 10. Diferencia entre la espiral de dos centros y la espiral promedio.

dos centros. El signo positivo en el eje de las ordenadas significa que el valor del tramo de espiral calculado con expresiones matemáticas es mayor que el respectivo valor medido en las obras rupestres, mientras que el signo negativo indica lo contrario.

Es importante anotar que la espiral aritmética o de Arquímedes es aquella espiral que se caracteriza porque la relación entre el ángulo de giro y el alejamiento del centro es de tipo lineal. En coordenadas polares su ecuación viene dada por: $r = a \cdot \theta$, en donde r es la distancia al origen o polo, θ el ángulo de giro y a es una constante³ (Gracián, 2009).

Por otro lado, la espiral logarítmica es una curva que obedece a la ecuación: $r = ae^{b\theta}$, en donde a y b ⁴ son constantes, e es el número de Euler⁵, r es la distancia al origen o polo y θ el ángulo de giro.

La espiral hiperbólica, también conocida con el nombre de espiral recíproca, es la inversa de la espiral de Arquímedes, por este motivo, su ecuación en coordenadas polares se expresa como: $r = a / \theta$, siendo r la distancia al origen o polo, θ el ángulo de giro y a ⁶ una constante.

Finalmente, la espiral de dos centros es una curva abierta, compuesta por arcos de semicircunferencia entrelazados entre sí, que se trazan alternativamente desde cada uno de los dos centros previamente establecidos. En este sentido, en la Tabla 3 se presentan las coordenadas polares que permiten la determinación de la distancia al origen (r) conociendo el valor del ángulo de giro (θ). En este caso, el valor de la constante a es de 3,37 centímetros, que corresponde al tramo promedio de las espirales grabadas en las obras rupestres.

El análisis de las Figuras 7, 8, 9 y 10 permite evidenciar la relación de la espiral promedio con la espiral de dos centros. Efectivamente, la diferencia entre los valores obtenidos con las expresiones matemáticas mostradas en la Tabla 3 y los valores medidos en los petroglifos no supera, por exceso o por defecto, de un centímetro. Las mayores diferencias se presentan en: la cuarta vuelta, con 0,52 cm; la quinta vuelta, con 0,56 cm y la $5 \frac{1}{4}$ vuelta, con 0,72 cm. En todos los tramos de la espiral, hasta la $2 \frac{1}{2}$ vuelta, los valores calculados y los medidos prácticamente coinciden (la máxima diferencia es de 2,2 mm, por defecto, en el primer cuarto de giro de la espiral).

No sucede lo mismo con los otros tipos de espirales considerados. En el caso de la espiral aritmética o de Arquímedes, a partir de la mitad de la primera vuelta, el valor calculado supera en 3,38 cm el valor medido en los bienes arqueológicos. Dicha diferencia se incrementa de manera proporcional a medida que aumenta el número de giros, de tal manera que en la $5 \frac{1}{4}$ vuelta dicha discrepancia alcanza los 51,42 cm.

En la espiral logarítmica la situación es mucho más crítica, pues en la mitad de la primera vuelta la diferencia entre el valor calculado y el medido alcanza los 12,85 cm y antes de llegar a la primera vuelta la desigualdad ha superado el metro. Esto se debe a que “esta espiral es muy diferente a la de Arquímedes, por cuanto conforme va

3 En este caso, $a = 2,15$ cm, considerando que cuando $\theta = \pi/2$, la distancia al origen debe ser $r = 3.37$ cm, de acuerdo con el valor promedio medido en los petroglifos.

4 En este caso, $b = 1$ y $a = 0,701$ cm, considerando que cuando $\theta = \pi/2$, la distancia al origen debe ser $r = 3.37$ cm, de acuerdo con el valor promedio medido en los petroglifos.

5 El valor del número de Euler (e) se considera igual a 2, 71828182.

6 En este caso, $a = 5,29$ cm, considerando que cuando $\theta = \pi/2$, la distancia al origen debe ser $r = 3.37$ cm, de acuerdo con el valor promedio medido en los petroglifos.

Tabla 3. Distancia al origen para una espiral de dos centros de acuerdo con su ángulo de giro y valor teórico de cada tramo de la espiral.

Vuelta de la espiral	Ángulo de giro Θ	Distancia al origen r	Valor del tramo de la espiral
1	0	0	-
	$\pi/2$	a	A
	π	a	$b = a$
	$3\pi/2$	a	$c = a$
	2π	$a\sqrt{2}$	$d = a\sqrt{2}$
2	$5\pi/2$	$2a$	$e = a$
	3π	$2a$	$f = a$
	$7\pi/2$	$2a$	$g = a$
	4π	$a\sqrt{6}$	$h = a(\sqrt{6} - \sqrt{2})$
3	$9\pi/2$	$3a$	$i = a$
	5π	$3a$	$j = a$
	$11\pi/2$	$3a$	$k = a$
	6π	$2a\sqrt{3}$	$l = a(2\sqrt{3} - \sqrt{6})$
4	$13\pi/2$	$4a$	$m = a$
	7π	$4a$	$n = a$
	$15\pi/2$	$4a$	$o = a$
	8π	$2a\sqrt{5}$	$p = 2a(\sqrt{5} - \sqrt{3})$
5	$17\pi/2$	$5a$	$q = a$
	9π	$5a$	$r = a$
	$19\pi/2$	$5a$	$s = a$
	10π	$a\sqrt{30}$	$t = a(\sqrt{30} - 2\sqrt{5})$
6	$21\pi/2$	$6a$	$u = a$

girando alrededor del polo, la curva se aleja de éste exponencialmente. Visualmente es una espiral que se abre muy rápidamente” (Gracián, 2009, ¶ 22).

Al contrario de lo que sucede con la espiral aritmética y la espiral logarítmica, en la espiral hiperbólica, a medida que aumenta el número de giros de la curva, los valores de los tramos calculados son cada vez más pequeños que los valores medidos, de tal manera que en la primera vuelta dicha diferencia (por defecto) es de 3,89 cm y en la quinta vuelta de 17,73 cm. Evidentemente, “esta curva se caracteriza porque comienza en una distancia infinita del polo central (cuando $\Theta = 0$), y se enrolla cada vez más rápidamente mientras se aproxima al polo central” (Trejos, 2008).

El vínculo matemático entre la espiral promedio y la espiral de dos centros también se puede comprobar en la

Figura 11, en la cual se muestran las dos espirales simultáneamente para su respectiva comparación: la espiral promedio (resultado de las mediciones de campo), tiene su trazo en color negro, mientras que la espiral matemática de dos centros se ha dibujado utilizando el color gris.

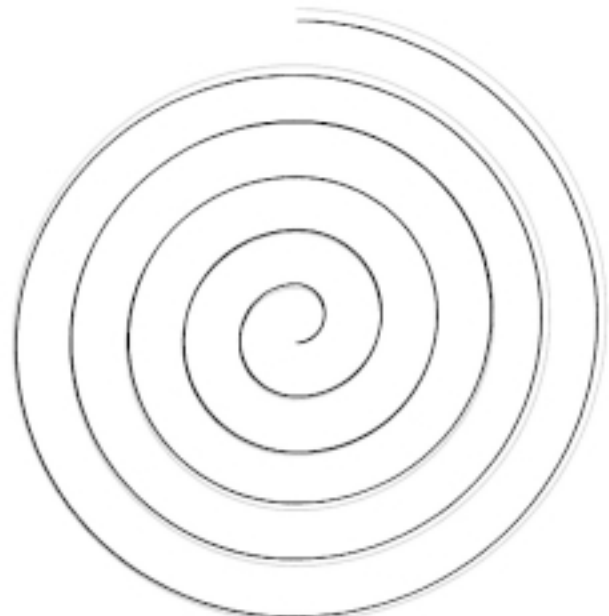


Figura 11. Correspondencia gráfica de la espiral promedio obtenida a partir de las mediciones realizadas en el terreno (de color negro) y la espiral de dos centros calculada matemáticamente (de color gris).

Discusión de los resultados

A diferencia de lo que puede suceder con otro tipo de espirales, como en el caso de la espiral aritmética, logarítmica e hiperbólica, el diseño de esta figura geométrica a partir de dos centros tiene una implicación práctica muy importante que apoya la hipótesis de que los indígenas que habitaron este territorio del sur de Colombia la emplearon en el arte rupestre: la facilidad de su trazo. Evidentemente, la espiral de dos centros se puede grabar sobre las superficies de las rocas utilizando elementos conocidos por estas comunidades desde tiempo inmemoriales, como piedras con la suficiente dureza para rayar sobre los afloramientos superficiales o las paredes de roca y cuerdas elaboradas con fibras vegetales o animales, tal como se explica a continuación:

En primer lugar, se seleccionan dos centros (C_1 y C_2) ubicados sobre la superficie de la roca de acuerdo con el

ancho de tramo que se quiera obtener (Figura 12); luego, con centro en C_1 se traza una semicircunferencia con un radio igual a la distancia entre C_1 y C_2 , ayudándose para ello de una cuerda; posteriormente, el diseñador se ubica en el centro C_2 y traza la otra semicircunferencia, uniendo las dos curvas; a partir de este momento se regresa al centro C_1 y el proceso se repite, siempre considerando el último punto del arco dibujado como lugar de intersección de dos trazos continuos. De esta manera, se pueden conseguir todas las vueltas de la espiral que se deseen.

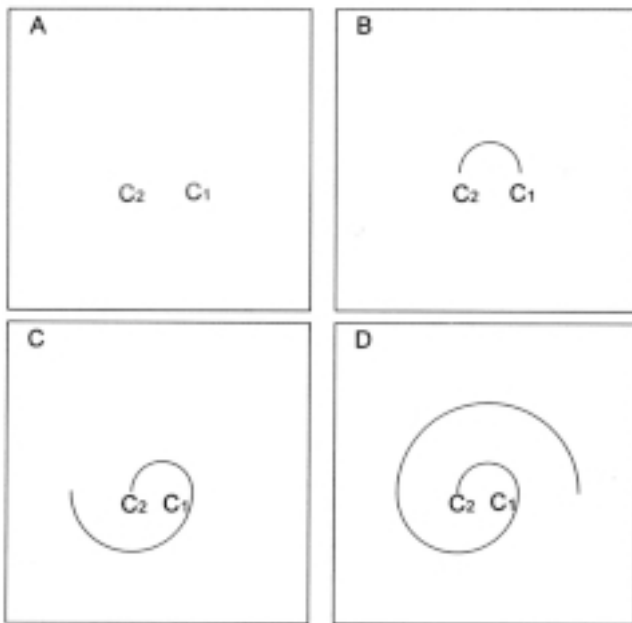


Figura 12. Procedimiento para trazar una espiral de dos centros: A) Ubicación de los dos centros (C_1 y C_2). B) Trazo de la primera semicircunferencia desde C_1 con radio igual a la distancia C_1 - C_2 . C) Trazo de la segunda semicircunferencia desde C_2 a partir del último punto del arco anterior. D) Trazo de la siguiente semicircunferencia nuevamente desde el centro C_1 .

Una vez que los indígenas conseguían el *rayado* sobre la roca con el trazo general de la espiral, entonces, procedían a tallarla:

También conocidas como grabados rupestres, estas manifestaciones fueron elaboradas al sustraer material de la superficie rocosa con instrumentos de una dureza superior. Para lograrlo, el antiguo ejecutor pudo utilizar punteros de piedra u otros elementos elaborados específicamente para este fin, pero hasta ahora en Colombia no ha sido posible hallar herramientas de este tipo que se puedan asociar con algún sitio rupestre. Lo común, en cambio,

ha sido encontrar fragmentos de roca tallada (lascas) que podrían evidenciar que los instrumentos se realizaban en el mismo sitio y que no se trataba de objetos muy elaborados, pues, su vida útil era muy corta. Es posible que el instrumento utilizado se destruyera en la acción de grabar y por eso no se puede encontrar hoy en día (Martínez & Botiva, 2002, p. 12).

Mediante la arqueología experimental, la cual “permite conocer la manera en que un objeto fue producido mediante el análisis de sus rasgos y la imitación de procedimientos e instrumentos similares a los empleados en la antigüedad” (Velásquez, 2006, p. 44), en la Figura 13 se muestra un ejemplo del trazo de una espiral de dos centros aplicando el procedimiento antes señalado, en donde se puede apreciar el enorme parecido de este diseño con los grabados precolombinos frecuentes en los Andes de Nariño.

Conclusiones

La investigación permitió determinar que las figuras geométricas son las que se presentan con mayor frecuencia en las obras rupestres de la zona noroccidental del Municipio de Pasto, con el 72,3% del total de los motivos, lo que coincide con lo que los arqueólogos han encontrado en otras manifestaciones culturales de los Andes de Nariño, como la cerámica, la orfebrería y los tejidos. De este tipo de diseños geométricos el más representativo desde el punto de vista estadístico es la espiral, con el 58,4 %. Es importante resaltar que de acuerdo con Marriner “la espiral es un motivo común en el arte rupestre colombiano” (2008, ¶ 71) y que dicha representación se ha encontrado en la mayoría de los países y culturas a lo largo del mundo (Trejos, 2008; Marriner, 2008).

Por otro lado, en esta investigación se pudo comprobar por primera vez en el estudio del arte rupestre regional, que el diseño de la espiral corresponde matemáticamente a la figura geométrica de la espiral de dos centros, la cual fue empleada por los indígenas por su relativa facilidad de trazo sobre la superficie de las piedras, a diferencia de lo que ocurre con otro tipo de espirales. A su vez, la Estadística permite determinar que la espiral característica de esta región tiene, en promedio, un tamaño de 20,5 centímetros en cualquiera de los ejes ortogonales y un ancho de tramo de 3,37 centímetros en cualquiera de las direcciones. También se resalta que el 56,8% de las volutas se desarrollan hasta alcanzar cerca de 3 vueltas completas.

Este hallazgo se constituye en una evidencia que permite reconocer la existencia de patrones en el trazo de este tipo de motivos, como una clara señal de un desarrollo de

nociones de geometría en la mente de sus diseñadores, contradiciendo aquella concepción equivocada de algunos autores de arte rupestre sobre el atraso cultural de los pueblos que encontraron los primeros europeos que arribaron a este territorio en el siglo XVI, tradición legada principalmente a través del testimonio de los cronistas españoles como **Pedro de Cieza de León** (1962).

En efecto, según **Plasencia** el dibujo de una figura geométrica, como una espiral, es una concretización de ideas o conceptos matemáticos; es decir, una representación externa de una imagen interna que se ha formado en la mente de una persona debido a sus estructuras cognitivas: “las representaciones externas aparecen en escena cuando queremos comunicar las ideas matemáticas que hemos construido o estamos construyendo” (2000, p. 27-28).

La arqueóloga Leticia González (citada por **Mendiola**, 2002) expresa que los petroglifos se presentan como imágenes visuales, es decir, como comunicación visual que expresa los intereses de quienes los crearon desde una perspectiva gráfico visual en la cual: “1. Las figuras son la representación de un sistema estandarizado de expresiones visuales, 2. Dispuestas bajo ciertas convenciones y no como producto del azar, 3. Las figuras seleccionadas y su distribución responden a una lógica, representando unas figuras, repitiendo unas y otras no, y 4. Reflejando en su conjunto un sistema cognoscitivo” (**Mendiola**, 2002, ¶ 40).

Más aún, desde la Etnomatemática, la recurrencia del motivo de la espiral en el arte rupestre de Nariño apoya al planteamiento que sostiene que el conocimiento matemá-



Figura 13. Comprobación del trazo de una espiral de dos centros sobre una superficie similar a las superficies pétreas en donde se han hallado los grabados indígenas.

tico es un producto cultural (**Gómez-Granell**, 1989; **Rosa & Orey**, 2005), es decir, que se origina en contextos de interrelación social, los cuales han acompañado a la humanidad desde la prehistoria hasta la actualidad:

Nosotros concluimos que matemáticos, científicos e ingenieros no son los únicos que usan y construyen conocimiento matemático. Este conocimiento ha sido alcanzado por procesos diferentes, común a todos los grupos socio-culturales que hacen posible la elaboración y el uso de habilidades matemáticas, que incluyen contar, localizar, medir, dibujar, representar, jugar, entender, comprender y explicar las necesidades e intereses de diversos grupos e individuos (**Rosa**, 2008, p. 109).

Bibliografía

- Albis, V. S.** 1987. Las proporciones del Sol de los Pastos. Boletín de Matemáticas de la Universidad Nacional de Colombia, **21**(2-3): p. 110-134.
- Cabrera, W.** 1966. Pictógrafos y petroglifos de Nariño. Revista de la Academia Colombiana de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales, **12**(48): 391-400.
- Closs, M. (Ed.)** 1986. Native American Mathematics. Austin: University of Texas Press.
- Cieza, P.** 1962 [1553]. La crónica del Perú. Madrid: Espasa-Calpe.
- D'Ambrosio, U.** 1999. La transferencia del conocimiento matemático a las colonias: factores sociales, políticos y culturales. Revista de la Sociedad Española de Historia de las Ciencias y de las Técnicas, **22**(44): 347-380.
- D'Amore, B.** 2003. Matemática en algunas culturas suramericanas: una contribución a la Etnomatemática. Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, **6**(3): 279-291.
- Gómez-Granell, C.** 1989. La adquisición del lenguaje matemático: un difícil equilibrio entre el rigor y el significado. Revista Comunicación, Lenguaje y Educación, **3**(4): 5-15.
- Gracián, E.** 2009. Espirales. *Blog de Sangakoo: matemáticas desde el otro lado*. Recuperado el 15 de abril de 2010, de <http://blog.sangakoo.com/divulgacion/ espirales/>
- Granda, O.** 1983. Arte rupestre Pasto y Quillacinga. Pasto: Sindamanoy.
- Groot, A. & Hooykas, E.** 1991. Intento de delimitación del territorio de los grupos étnicos Pastos y Quillacingas en el altiplano nariñense. Santafé de Bogotá: Fundación de Investigaciones Arqueológicas Nacionales.
- Higuera, C. L.** 2008. Concepción matemática indígena en la Amazonía colombiana. Revista Latinoamericana de Etnomatemática, **1**(1): 12-20.
- Marriner, H. A.** 2008. The colombian rock art spiral: A shamanic tunnel? *Rupestreweb*. Recuperado el 18 de diciembre de 2009, de <http://www.rupestreweb.info/espiral.html>

- Martínez, D. & Botiva, A.** 2002. Manual de arte rupestre de Cundinamarca. Bogotá: Instituto Colombiano de Antropología e Historia ICANH.
- Mejía, J.** 1934. Ensayo sobre prehistoria nariñesa. Pasto: Imprenta de la Diócesis de Pasto.
- Mendiola, F.** (2002, 6 de mayo). Arte rupestre: epistemología, estética y geometría. Sus interrelaciones con la simetría de la cultura. Ensayo de explicación sobre algunas ideas centrales de Adolfo Best Maugard y Beatriz Braniff. *Rupestreweb*. Recuperado el 17 de diciembre de 2009, de <http://rupestreweb.tripod.com/mendiola2.html>
- Ortiz-Franco, L.** 2004. Prolegómenos a las etnomatemáticas en Mesoamérica. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 7(2): 171-185.
- Plasencia, I. C.** 2000. Análisis del papel de las imágenes en la actividad matemática: un estudio de casos. Tesis para optar al título de Doctor en Ciencias Matemáticas, Departamento de Análisis Matemático de la Universidad de La Laguna, La Laguna, España.
- Restrepo, V.** 1972. Los chibchas antes de la conquista española. Bogotá: Imprenta Banco Popular.
- Rodríguez, E.** 1992. Fauna precolombina de Nariño. Santafé de Bogotá: Fundación de Investigaciones Arqueológicas Nacionales.
- Rosa, M.** 2008. A dialogue with Ubiratan D'Ambrosio: a brazilian conversation about ethnomathematics. *Revista Latinoamericana de Etnomatemática*, 1(2): 88-110.
- . & **Orey, D. C.** 2005. Las raíces históricas del programa Etnomatemáticas. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 8(3): 363-377.
- Trejos, H. E.** 2008. Espirales y homotecias: ¿autonomía o capricho de la forma? *Rupestreweb*. Recuperado el 18 de diciembre de 2009, de <http://www.rupestreweb.info/espiales.htm>
- Velásquez, A.** 2006. Producción de objetos de concha en el Templo Mayor: Arqueología experimental. *Revista Arqueología Mexicana*, 14(18): 44-48.

Recibido: agosto 28 de 2009.

Aceptado para su publicación: diciembre 18 de 2009.

Anexo 1. Tamaño de las espirales en las dos direcciones perpendiculares X,Y.

No.	Petroglifo	Conjunto	Motivo	Tamaño en cm	
				Lx	Ly
1	Guallibamba	1	1	30,10	31,80
2	Guallibamba	1	2	31,25	33,70
3	Edén I	1	2	26,10	25,50
4	Edén I	1	3	31,30	27,40
5	Edén II	1	1	19,95	18,45
6	Edén II	1	2	15,05	13,30
7	Edén II	1	3	13,20	15,15
8	Chasquisca	1	1	18,15	15,40
9	Turguaico	1	1	32,80	35,20
10	Turguaico	1	2	20,05	19,75
11	Tomates	1	2	26,70	27,00
12	Tomates	1	3	21,15	17,10
13	Tomates	1	4	14,85	16,10
14	Tomates	2	1	27,15	29,20
15	Tomates	3	1	19,95	21,00
16	Tomates	3	2	14,85	12,40
17	Mantel de Piedra	1	1	26,80	26,35
18	Mantel de Piedra	1	2	-	-
19	Mantel de Piedra	1	3	15,95	15,40
20	Mantel de Piedra	1	4	20,50	22,60
21	Mantel de Piedra	1	5	13,95	17,20
22	Mantel de Piedra	1	6	20,85	22,55
23	Mantel de Piedra	1	7	25,35	23,70
24	Mantel de Piedra	1	9	11,20	13,80
25	Mantel de Piedra	1	12	23,80	26,25
26	Mantel de Piedra	1	13	13,55	17,05
27	Mantel de Piedra	1	14	11,05	14,35
28	Mantel de Piedra	1	15	-	-
29	Mantel de Piedra	1	18	14,50	16,00
30	Mantel de Piedra	1	19	26,05	24,75
31	Mantel de Piedra	1	20	29,15	30,40
32	Mantel de Piedra	1	21	26,45	29,05
33	Mantel de Piedra	1	22	18,90	17,45
34	Mantel de Piedra	1	25	18,85	17,30
35	Mantel de Piedra	1	26	18,75	17,85
36	Mantel de Piedra	1	27	19,75	20,20
37	Mantel de Piedra	1	30	12,45	14,80
38	Mantel de Piedra	1	31	17,75	16,50
39	Mantel de Piedra	1	32	21,00	18,50
40	Mantel de Piedra	1	35	9,10	6,75
41	Mantel de Piedra	1	36	25,20	22,95
42	Mantel de Piedra	1	37	9,60	11,65
43	Mantel de Piedra	1	38	25,25	21,05
44	Mantel de Piedra	1	39	18,85	23,75
Total de datos (n):				42	42
Mayor valor (L máx.):				32,80	35,20
Menor valor (L mín.):				9,10	6,75
Rango (R):				23,70	28,45
Media aritmética (m):				20,41	20,63
Desviación estándar (S):				6,36	6,45
Coeficiente de dispersión (V) en %:				31,2	31,3
Coeficiente de uniformidad (U) en %:				68,8	68,7

Anexo 2. Medición de los tramos a, e, i, m, q, u de las espirales analizadas.

No.	Petroglifo	Conjunto	Motivo	Tramo en centímetros					
				a	e	i	m	q	u
1	Guallibamba	1	1	2,85	2,35	2,65	2,70	2,85	3,30
2	Guallibamba	1	2	4,60	2,50	3,85	4,85	3,45	-
3	Edén I	1	2	3,05	2,85	3,00	2,55	1,60	-
4	Edén I	1	3	2,90	2,55	2,55	1,95	2,55	-
5	Edén II	1	1	3,40	2,75	2,75	-	-	-
6	Edén II	1	2	3,25	2,40	2,80	-	-	-
7	Edén II	1	3	3,15	2,15	2,60	-	-	-
8	Chasquisca	1	1	2,75	2,50	2,85	-	-	-
9	Turgaico	1	1	4,70	3,55	4,25	4,55	3,10	-
10	Turgaico	1	2	4,65	3,70	3,15	-	-	-
11	Tomates	1	2	3,80	3,00	2,80	3,65	-	-
12	Tomates	1	3	4,45	3,60	-	-	-	-
13	Tomates	1	4	3,25	2,80	3,20	-	-	-
14	Tomates	2	1	5,05	4,00	3,80	5,00	-	-
15	Tomates	3	1	2,60	3,05	3,05	3,65	-	-
16	Tomates	3	2	3,65	2,70	-	-	-	-
17	Mantel de Piedra	1	1	3,70	3,45	4,15	3,95	-	-
18	Mantel de Piedra	1	2	4,40	-	-	-	-	-
19	Mantel de Piedra	1	3	3,00	2,15	2,55	-	-	-
20	Mantel de Piedra	1	4	3,50	2,80	3,10	3,50	-	-
21	Mantel de Piedra	1	5	2,90	4,10	4,30	-	-	-
22	Mantel de Piedra	1	6	3,50	3,30	2,50	2,60	-	-
23	Mantel de Piedra	1	7	2,65	3,00	2,70	2,00	2,65	-
24	Mantel de Piedra	1	9	2,35	3,15	3,15	-	-	-
25	Mantel de Piedra	1	12	4,15	4,70	4,90	-	-	-
26	Mantel de Piedra	1	13	5,00	4,40	-	-	-	-
27	Mantel de Piedra	1	14	4,25	2,75	-	-	-	-
28	Mantel de Piedra	1	15	-	-	-	-	-	-
29	Mantel de Piedra	1	18	3,40	3,10	3,00	-	-	-
30	Mantel de Piedra	1	19	1,75	2,10	2,60	2,90	3,55	-
31	Mantel de Piedra	1	20	3,25	3,75	2,40	2,70	2,70	-
32	Mantel de Piedra	1	21	3,35	3,30	3,70	4,55	-	-
33	Mantel de Piedra	1	22	3,80	3,95	-	-	-	-
34	Mantel de Piedra	1	25	2,70	3,10	4,25	-	-	-
35	Mantel de Piedra	1	26	4,05	3,45	3,70	-	-	-
36	Mantel de Piedra	1	27	6,00	4,60	-	-	-	-
37	Mantel de Piedra	1	30	3,40	3,95	-	-	-	-
38	Mantel de Piedra	1	31	1,45	2,00	1,95	2,40	-	-
39	Mantel de Piedra	1	32	2,05	3,50	2,70	-	-	-
40	Mantel de Piedra	1	35	2,00	2,75	-	-	-	-
41	Mantel de Piedra	1	36	5,95	3,95	4,30	-	-	-
42	Mantel de Piedra	1	37	1,90	4,35	-	-	-	-
43	Mantel de Piedra	1	38	5,60	3,95	3,15	-	-	-
44	Mantel de Piedra	1	39	6,10	5,45	3,00	-	-	-
Total de datos (n):				43	42	33	16	8	1
Mayor valor (L máx.):				6,10	5,45	4,90	5,00	3,55	3,30
Menor valor (L mín.):				1,45	2,00	1,95	1,95	1,60	3,30
Rango (R):				4,65	3,45	2,95	3,05	1,95	0,00
Media aritmética (m):				3,59	3,27	3,19	3,34	2,81	3,30
Desviación estándar (S):				1,13	0,78	0,69	0,98	0,57	-
Coeficiente de dispersión (V) en %:				31,6	23,9	21,5	29,3	20,4	-
Coeficiente de uniformidad (U) en %:				68,4	76,1	78,5	70,7	79,6	-

Anexo 3. Medición de los tramos b, f, j, n, r de las espirales analizadas.

No.	Petroglifo	Conjunto	Motivo	Tramo en centímetros				
				b	f	j	n	r
1	Guallibamba	1	1	2,55	2,75	2,60	3,10	3,70
2	Guallibamba	1	2	2,90	2,80	4,20	3,90	-
3	Edén I	1	2	3,55	3,75	3,00	3,05	-
4	Edén I	1	3	2,95	3,40	2,35	2,75	2,45
5	Edén II	1	1	3,00	3,20	2,40	-	-
6	Edén II	1	2	2,95	2,80	2,50	-	-
7	Edén II	1	3	2,20	2,40	2,40	-	-
8	Chasquisca	1	1	2,15	3,00	3,05	-	-
9	Turguaico	1	1	4,00	3,80	4,00	3,85	-
10	Turguaico	1	2	3,85	3,80	3,05	-	-
11	Tomates	1	2	3,60	3,40	4,25	4,60	-
12	Tomates	1	3	5,20	4,10	-	-	-
13	Tomates	1	4	4,35	3,35	-	-	-
14	Tomates	2	1	4,60	4,55	4,30	-	-
15	Tomates	3	1	2,20	2,85	3,10	-	-
16	Tomates	3	2	3,85	3,10	-	-	-
17	Mantel de Piedra	1	1	4,00	3,45	4,00	-	-
18	Mantel de Piedra	1	2	5,20	2,75	3,20	3,90	-
19	Mantel de Piedra	1	3	3,30	2,80	2,95	-	-
20	Mantel de Piedra	1	4	2,50	3,20	3,60	-	-
21	Mantel de Piedra	1	5	2,50	3,45	-	-	-
22	Mantel de Piedra	1	6	3,50	3,90	3,10	-	-
23	Mantel de Piedra	1	7	2,55	2,75	2,25	2,95	3,15
24	Mantel de Piedra	1	9	2,55	2,80	-	-	-
25	Mantel de Piedra	1	12	5,10	4,00	4,20	-	-
26	Mantel de Piedra	1	13	4,35	3,40	-	-	-
27	Mantel de Piedra	1	14	2,65	4,85	-	-	-
28	Mantel de Piedra	1	15	-	-	-	-	-
29	Mantel de Piedra	1	18	2,20	4,55	-	-	-
30	Mantel de Piedra	1	19	1,70	2,55	2,95	3,40	3,85
31	Mantel de Piedra	1	20	2,75	2,95	2,65	2,80	3,20
32	Mantel de Piedra	1	21	3,20	3,45	4,40	3,60	-
33	Mantel de Piedra	1	22	4,05	3,40	2,85	-	-
34	Mantel de Piedra	1	25	2,55	2,75	4,50	-	-
35	Mantel de Piedra	1	26	2,95	3,05	3,85	-	-
36	Mantel de Piedra	1	27	5,10	4,00	-	-	-
37	Mantel de Piedra	1	30	3,90	3,85	-	-	-
38	Mantel de Piedra	1	31	1,65	1,85	2,05	3,05	-
39	Mantel de Piedra	1	32	3,45	2,60	3,50	-	-
40	Mantel de Piedra	1	35	2,00	3,60	-	-	-
41	Mantel de Piedra	1	36	5,05	4,00	4,00	-	-
42	Mantel de Piedra	1	37	2,35	2,95	-	-	-
43	Mantel de Piedra	1	38	5,40	3,60	3,65	-	-
44	Mantel de Piedra	1	39	4,30	4,40	-	-	-
Total de datos (n):				43	43	30	12	5
Mayor valor (L máx.):				5,40	4,85	4,50	4,60	3,85
Menor valor (L mín.):				1,65	1,85	2,05	2,75	2,45
Rango (R):				3,75	3,00	2,45	1,85	1,40
Media aritmética (m):				3,37	3,35	3,30	3,41	3,27
Desviación estándar (S):				1,04	0,63	0,72	0,54	0,49
Coeficiente de dispersión (V) en %:				30,8	18,9	21,9	15,8	15,1
Coeficiente de uniformidad (U) en %:				69,2	81,1	78,1	84,2	84,9

Anexo 4. Medición de los tramos c, g, k, o, s de las espirales analizadas.

No.	Petroglifo	Conjunto	Motivo	Tramo en centímetros				
				b	f	j	n	r
1	Guallibamba	1	1	2,90	2,65	2,75	3,20	3,60
2	Guallibamba	1	2	2,55	3,25	5,25	3,40	-
3	Edén I	1	2	2,75	2,55	2,95	4,20	-
4	Edén I	1	3	2,50	2,85	3,00	3,10	3,45
5	Edén II	1	1	2,85	3,45	3,25	-	-
6	Edén II	1	2	2,15	2,70	-	-	-
7	Edén II	1	3	1,85	2,75	2,65	-	-
8	Chasquisca	1	1	2,00	2,80	2,50	-	-
9	Turgaico	1	1	3,60	3,40	3,25	4,80	-
10	Turgaico	1	2	3,20	2,80	2,25	-	-
11	Tomates	1	2	3,10	3,25	3,50	3,90	-
12	Tomates	1	3	4,95	4,10	-	-	-
13	Tomates	1	4	3,15	3,70	-	-	-
14	Tomates	2	1	3,80	3,85	3,70	-	-
15	Tomates	3	1	2,70	2,55	3,40	-	-
16	Tomates	3	2	3,15	2,90	-	-	-
17	Mantel de Piedra	1	1	4,00	3,50	3,60	-	-
18	Mantel de Piedra	1	2	5,20	3,20	3,25	-	-
19	Mantel de Piedra	1	3	2,70	2,75	2,25	-	-
20	Mantel de Piedra	1	4	2,60	3,35	3,75	-	-
21	Mantel de Piedra	1	5	2,30	3,60	-	-	-
22	Mantel de Piedra	1	6	2,75	3,85	4,05	-	-
23	Mantel de Piedra	1	7	2,60	3,65	2,25	2,20	-
24	Mantel de Piedra	1	9	2,00	3,15	-	-	-
25	Mantel de Piedra	1	12	5,05	4,60	2,85	-	-
26	Mantel de Piedra	1	13	7,65	-	-	-	-
27	Mantel de Piedra	1	14	2,00	5,35	-	-	-
28	Mantel de Piedra	1	15	-	2,40	-	-	-
29	Mantel de Piedra	1	18	2,50	4,00	-	-	-
30	Mantel de Piedra	1	19	2,25	2,15	2,50	2,45	2,50
31	Mantel de Piedra	1	20	3,05	2,40	2,70	3,05	4,40
32	Mantel de Piedra	1	21	2,80	3,90	3,85	3,60	-
33	Mantel de Piedra	1	22	4,25	3,15	2,30	-	-
34	Mantel de Piedra	1	25	2,75	4,50	-	-	-
35	Mantel de Piedra	1	26	3,20	3,45	-	-	-
36	Mantel de Piedra	1	27	4,90	4,70	-	-	-
37	Mantel de Piedra	1	30	3,45	4,00	-	-	-
38	Mantel de Piedra	1	31	1,50	1,75	2,05	3,40	-
39	Mantel de Piedra	1	32	3,00	4,20	3,05	-	-
40	Mantel de Piedra	1	35	2,00	-	-	-	-
41	Mantel de Piedra	1	36	4,15	4,60	-	-	-
42	Mantel de Piedra	1	37	2,45	2,95	-	-	-
43	Mantel de Piedra	1	38	5,10	3,25	-	-	-
44	Mantel de Piedra	1	39	5,30	3,90	-	-	-
Total de datos (n):				43	42	25	11	4
Mayor valor (L máx.):				7,65	5,35	5,25	4,80	4,40
Menor valor (L mín.):				1,50	1,75	2,05	2,20	2,50
Rango (R):				6,15	3,60	3,20	2,60	1,90
Media aritmética (m):				3,23	3,38	3,08	3,39	3,49
Desviación estándar (S):				1,20	0,75	0,71	0,71	0,67
Coeficiente de dispersión (V) en %:				37,2	22,3	23,1	20,8	19,4
Coeficiente de uniformidad (U) en %:				62,8	77,7	76,9	79,2	80,6

Anexo 5. Medición de los tramos d, h, l, p, t de las espirales analizadas.

No.	Petroglifo	Conjunto	Motivo	Tramo en centímetros				
				b	f	j	n	r
1	Guallibamba	1	1	3,75	2,35	3,20	3,10	3,00
2	Guallibamba	1	2	4,75	4,05	4,65	4,00	-
3	Edén I	1	2	3,50	3,45	2,90	2,90	-
4	Edén I	1	3	4,00	2,80	2,70	4,20	3,70
5	Edén II	1	1	4,45	3,85	3,05	-	-
6	Edén II	1	2	3,70	3,10	-	-	-
7	Edén II	1	3	3,90	2,30	-	-	-
8	Chasquisca	1	1	3,55	3,70	2,70	-	-
9	Turguaico	1	1	7,20	4,00	3,60	2,35	-
10	Turguaico	1	2	4,60	2,30	2,45	-	-
11	Tomates	1	2	4,55	2,95	3,35	-	-
12	Tomates	1	3	6,50	5,35	-	-	-
13	Tomates	1	4	3,65	3,50	-	-	-
14	Tomates	2	1	5,80	3,70	4,20	-	-
15	Tomates	3	1	4,85	3,90	3,05	-	-
16	Tomates	3	2	4,80	3,10	-	-	-
17	Mantel de Piedra	1	1	6,40	4,20	4,75	-	-
18	Mantel de Piedra	1	2	-	-	-	-	-
19	Mantel de Piedra	1	3	4,10	2,80	-	-	-
20	Mantel de Piedra	1	4	4,50	3,35	3,35	-	-
21	Mantel de Piedra	1	5	4,25	3,75	-	-	-
22	Mantel de Piedra	1	6	4,10	3,15	3,10	-	-
23	Mantel de Piedra	1	7	3,90	3,45	2,30	2,05	-
24	Mantel de Piedra	1	9	2,90	2,95	-	-	-
25	Mantel de Piedra	1	12	6,60	3,90	-	-	-
26	Mantel de Piedra	1	13	5,80	-	-	-	-
27	Mantel de Piedra	1	14	3,55	-	-	-	-
28	Mantel de Piedra	1	15	-	-	-	-	-
29	Mantel de Piedra	1	18	4,50	3,25	-	-	-
30	Mantel de Piedra	1	19	3,25	2,25	3,25	2,85	-
31	Mantel de Piedra	1	20	5,10	3,65	2,85	3,20	-
32	Mantel de Piedra	1	21	4,30	3,50	4,00	-	-
33	Mantel de Piedra	1	22	5,20	3,40	-	-	-
34	Mantel de Piedra	1	25	4,75	4,30	-	-	-
35	Mantel de Piedra	1	26	5,00	3,90	-	-	-
36	Mantel de Piedra	1	27	7,30	3,35	-	-	-
37	Mantel de Piedra	1	30	4,70	-	-	-	-
38	Mantel de Piedra	1	31	2,30	1,65	2,30	2,90	-
39	Mantel de Piedra	1	32	4,40	3,65	3,40	-	-
40	Mantel de Piedra	1	35	3,50	-	-	-	-
41	Mantel de Piedra	1	36	6,80	5,35	-	-	-
42	Mantel de Piedra	1	37	4,30	-	-	-	-
43	Mantel de Piedra	1	38	7,90	4,70	-	-	-
44	Mantel de Piedra	1	39	5,50	4,65	-	-	-
Total de datos (n):				42	37	20	9	2
Mayor valor (L máx.):				7,90	5,35	4,75	4,20	3,70
Menor valor (L mín.):				2,30	1,65	2,30	2,05	3,00
Rango (R):				5,60	3,70	2,45	2,15	0,70
Media aritmética (m):				4,73	3,50	3,26	3,06	3,35
Desviación estándar (S):				1,23	0,80	0,68	0,65	0,35
Coeficiente de dispersión (V) en %:				26,1	22,7	20,9	21,3	10,4
Coeficiente de uniformidad (U) en %:				73,9	77,3	79,1	78,7	89,6