

PRINCIPES DE LA DYNAMIQUE DES FLUIDES

(PRINCIPIOS DE LA DINAMICA DE LOS FLUIDOS)

JULIO GARAVITO A.

Director del Observatorio Astronómico Nacional, Bogotá,
de 1893 a 1919.

I

Equations de mouvement.

Soit ρ la masse spécifique du fluide en un point dont les coordonnées soient x, y, z ; soit F la force extérieure par unité de masse qui sollicite un élément fluide qui occupe en un instant t la position (x, y, z) et soient X, Y, Z les composantes de la force en question. Appelons p la pression par unité d'aire, que subit l'élément considéré et $\frac{dp}{dx}, \frac{dp}{dy}, \frac{dp}{dz}$ les dérivées partielles de la dite pression par rapport aux coordonnées. Nous aurons, en appelant x', y', z' les vitesses projetées et x'', y'', z'' les accélérations:

$$\frac{1}{\rho} \frac{dp}{dx} = X - x'' \quad \frac{1}{\rho} \frac{dp}{dy} = Y - y'' \quad \frac{1}{\rho} \frac{dp}{dz} = Z - z'' \quad (1)$$

Les quantités p, ρ, x', y', z' seront, en général, des fonctions de x, y, z et t .

$$\text{On ajoutera à ces équations celle de continuité} \quad \frac{d\rho x'}{dx} + \frac{d\rho y'}{dy} + \frac{d\rho z'}{dz} + \frac{d\rho}{dt} = 0 \quad (2)$$

$$\text{et aussi celles qui concernent à les limites de la masse et celles du fluide} \quad F(p, \rho) = 0. \quad (3)$$

II

Formule fondamentale.

Tous ceux qui ont cherché à simplifier les équations (1) ont fait, pour cela, deux hypothèses, à savoir:
1.° L'existence de la fonction des forces, c'est-à-dire, qu'il existe la fonction U dont la différentielle totale est $dU = Xdx + Ydy + Zdz$.

2.° L'existence d'une fonction φ telle qu'elle ait pour différentielle $d\varphi = x'dx + y'dy + z'dz$.
Nous allons trouver la variation différentielle de la pression, selon un trajet quelconque, en ayant seulement recours à la première hypothèse, et à démontrer aussi que la seconde hypothèse n'est pas nécessaire et que, loin de simplifier, elle complique l'étude, en faisant apparaître des conditions qui, en réalité, ne sont pas nécessaires.

En appelant v la vitesse et α, β et γ les angles que celle-ci fait avec les axes, on aura:

$$\begin{aligned} x' &= v \cos \alpha & y' &= v \cos \beta & z' &= v \cos \gamma \\ x'' &= v' \cos \alpha + v \frac{d \cos \alpha}{dt} & y'' &= v' \cos \beta + v \frac{d \cos \beta}{dt} & z'' &= v' \cos \gamma + v \frac{d \cos \gamma}{dt} \end{aligned}$$

dans lesquels v' est la dérivée totale de v et $\frac{d}{dt} \cos \alpha, \frac{d}{dt} \cos \beta, \frac{d}{dt} \cos \gamma$ sont les dérivées totales de $\cos \alpha, \cos \beta$ et $\cos \gamma$ par rapport au temps. On aura donc

$$(4) \begin{cases} \frac{1}{\rho} \frac{dp}{dx} = X - v' \cos \alpha - v \frac{d \cos \alpha}{dt} \\ \frac{1}{\rho} \frac{dp}{dy} = Y - v' \cos \beta - v \frac{d \cos \beta}{dt} \\ \frac{1}{\rho} \frac{dp}{dz} = Z - v' \cos \gamma - v \frac{d \cos \gamma}{dt} \end{cases}$$

Appelons $\delta x, \delta y$ et δz les projections sur les axes d'un déplacement arbitraire quelconque δs et a, b et c les angles que fait δs avec les axes, nous aurons: $\cos a = \frac{\delta x}{\delta s}, \cos b = \frac{\delta y}{\delta s}, \cos c = \frac{\delta z}{\delta s}$

En multipliant la première des équations (4) par δx , la deuxième par δy et la troisième par δz et additionnant les résultats, on aura:

$$\frac{1}{\rho} \delta p = X \delta x + Y \delta y + Z \delta z - v' \delta s (\cos \alpha \cos a + \cos \beta \cos b + \cos \gamma \cos c) - v \delta s \left[\frac{d \cos \alpha}{dt} \cos a + \frac{d \cos \beta}{dt} \cos b + \frac{d \cos \gamma}{dt} \cos c \right]$$

Ou bien, appelant U la fonction des forces, et r le rayon de courbure de la trajectoire effective:

$$\frac{1}{\rho} \delta p = \delta U - v' \cos (\delta s, ds) \delta s - \frac{v^2}{r} \left[r \frac{d \cos \alpha}{ds} \cos a + r \frac{d \cos \beta}{ds} \cos b + r \frac{d \cos \gamma}{ds} \cos c \right] \delta s$$

Dans laquelle $(\delta s, ds)$ représente l'angle que fait la tangente à la trajectoire avec le trajet arbitraire, et ds la différentielle de l'arc de trajectoire effective.

$$\text{Posons} \quad r \frac{d \cos \alpha}{ds} = \cos l \quad r \frac{d \cos \beta}{ds} = \cos m \quad r \frac{d \cos \gamma}{ds} = \cos n$$

dans lesquelles l, m et n sont les angles que fait avec les axes la normale principale à la trajectoire effective dans le sens de la concavité de celle-ci; par conséquent

$$r \frac{d \cos \alpha}{ds} \cos a + r \frac{d \cos \beta}{ds} \cos b + r \frac{d \cos \gamma}{ds} \cos c = \cos (r, \delta s)$$

$(r, \delta s)$ étant l'angle que fait la normale principale avec le trajet arbitraire, tenant compte que la direction de la normale est estimée vers le centre de courbure. On aura:

$$(5) \quad \delta U - \frac{1}{\rho} \delta p = \left[s' \cos (\delta s, ds) + \frac{s'^2}{r} \cos (r, \delta s) \right] \delta s \quad \text{Dans laquelle} \quad s' = v' \quad s'' = v''$$

En mettant, pour la plus grande commodité, $\mu = (\delta s, ds)$ $v = \pi - (r, \delta s)$. L'angle v nous représentera l'angle du prolongement de la normale vers la partie convexe, avec le déplacement arbitraire, et nous aurons:

$$(5') \quad \frac{1}{\rho} \delta p = \delta U - v' \cos \mu \delta s + \frac{v^2}{r} \cos v \delta s \quad \text{qui est la formule fondamentale.}$$

III

Applications aux liquides.

Dans un liquide ρ peut se considérer constant, lorsque la température est constant. En négligeant le frottement et la viscosité, on a: $\delta U = -g \delta z$ quand on prend l'axe des z dans le sens de la verticale vers le haut.

Nous pourrions, à la rigueur, faire $\delta s = ds$ en temps, magnitude et direction; et dans ce cas on aura $\cos \mu = 1$ $\cos v = 0$ et en changeant la caractéristique δ par d nous aurons:

$$\frac{1}{\rho} \left[dp - \frac{dp}{dt} dt \right] = -g dz - \frac{1}{dt} dv \cdot ds = -g dz - v dv$$

$$\text{Si } p \text{ est indépendant du temps } t \quad \frac{1}{\rho} dp = -g dz - v dv \quad \text{Laquelle, intégrée, donne}$$

$$\frac{p}{\rho g} - \frac{p_0}{\rho g} = z_0 - z - \frac{v^2}{2g} + \frac{v_0^2}{2g} \quad \text{Ou bien, en appelant } \omega \text{ le poids spécifique } \frac{p}{\omega} + \frac{v^2}{2g} + z = \frac{p_0}{\omega} + \frac{v_0^2}{2g} + z_0$$

qui est le théorème de Bernoulli.

Il n'y a donc pas besoin de l'hypothèse de vitesses indépendantes du temps (régime permanent) pour déduire ce principe des équations de l'Hydrodynamique. On a seulement besoin de que p soit indépendant.

La chute d'une masse isolée d'eau satisfait exactement au théorème de Bernoulli, et cependant le régime permanent n'existe pas, mais la pression est constante et égale à la pression atmosphérique.

Nous avons supprimé dans cet étude plusieurs conséquences importantes que nous avons déduit, pour ne pas trop prolonger cette exposition.

Nous déduirons, cependant, quelques conséquences qui sont connues de tout le monde, afin de faire remarquer l'importance de l'équation fondamentale.

Cas d'un liquide soumis à un mouvement de rotation autour d'un axe vertical.

Prenons pour axe des z l'axe de rotation et supposons la rotation uniforme. On aura

$$v' = 0 \quad v^2 = \omega^2 r^2 \quad \frac{v^2}{r} = \omega^2 r$$

$$\text{L'équation (5') devient} \quad \frac{1}{\rho} \delta p = -g \delta z + \omega^2 r \cos v \delta s \quad \text{Et comme on a:} \quad \cos v \delta s = \delta r$$

on aura:

$$\frac{1}{\rho} \delta p = -g \delta z + \omega^2 r \delta r. \quad (a)$$

En intégrant l'équation antérieure depuis un point dont la distance à l'axe soit r_0 et la hauteur sur le plan des $x y$ soit z_0 jusqu'à un autre r_1 et z_1 nous aurons:

$$\frac{p_1}{\rho g} - \frac{p_0}{\rho g} = z_0 - z_1 + \frac{w^2}{2g} r_1^2 - \frac{w^2}{2g} r_0^2 \quad \text{Ou} \quad \frac{p_1}{\rho g} + z_1 - \frac{v_1^2}{2g} = \frac{p_0}{\rho g} + z_0 - \frac{v_0^2}{2g}$$

Si nous voulons trouver l'équation des surfaces de niveau, nous ferons $\delta P = 0$. Dans ce cas, la formule (a) donne:

$$g\delta z = w^2 r \delta r \quad \text{Ou bien} \quad gz + c = \frac{w^2}{2} r^2 \quad \text{Ou} \quad gz + c = \frac{w^2}{2} (x^2 + y^2)$$

qui est l'équation du paraboloïde.

Cas d'un liquide soumis à une rotation uniforme autour d'un axe horizontal.

Prenons pour axe des y l'axe de rotation et faisons comme plus haut: $\delta p = 0$ $v = 0$ et $\cos v \delta s = \delta r$. L'équation différentielle de la surface de niveau, sera, comme auparavant:

$$g\delta z = w^2 r \delta r \quad \text{Donc} \quad gz + c = \frac{w^2}{2} r^2 \quad \text{Mais, dans ce cas} \quad r^2 = x^2 + z^2 \quad \text{D'où} \quad gz + c = \frac{w^2}{2} (x^2 + z^2)$$

$$\text{Ou encore} \quad x^2 + \left[z - \frac{g}{w^2} \right]^2 = c$$

Equation d'une surface cylindrique de base circulaire, dont les génératrices sont parallèles à l'axe de rotation et dont l'axe se trouve sur celui de rotation à une hauteur $\frac{g}{w^2}$.

Toutes ces conclusions ont été déduites de l'équation (5) appliquée à un liquide dans lequel on n'a pas fait cas du frottement et de la viscosité. En conséquence le théorème de Bernoulli et celui de Torricelli ne seront que des premières approximations dans le mouvement des liquides.

La condition de que les vitesses x' y' et z' soient des fonctions exclusives des coordonnées, sans dépendre du temps, n'est pas nécessaire à la démonstration du théorème de Bernoulli. Nous donnerons ensuite des éclaircissements sur ce point important.

IV

Étude de la simplification des équations de l'Hydrodynamique proposée par M. Lagrange.

Cette simplification est fondée sur l'existence d'une fonction φ dont la différentielle totale soit

$$\delta \varphi = x' \delta x + y' \delta y + z' \delta z.$$

Avec cette hypothèse les équations de l'Hydrodynamique se réduisent à

$$\frac{I}{\rho} \delta P = \delta U - \delta \frac{d\varphi}{dt} - \frac{1}{2} \delta \left[\left(\frac{d\varphi}{dx} \right)^2 + \left(\frac{d\varphi}{dy} \right)^2 + \left(\frac{d\varphi}{dz} \right)^2 \right] \quad (A)$$

étant donné comme admis que la fonction U des forces existe.

Il est évident que nous ne pourrions pas changer, dans cette formule, la caractéristique δ dans laquelle on suppose t constant, par d selon la trajectoire, sans imposer la condition effective de que p soit indépendant de t et l'illusoire de que φ le soit aussi.

Pour déduire de (A) le théorème de Bernoulli, relatif aux liquides pesants, ou le théorème de Torricelli pour niveau constant, on a besoin des conditions suivantes:

1.° Que la masse spécifique ρ soit constante, condition remplie par un liquide dont la température est constante.

2.° Qu'il existe la fonction U des forces et, que, d'ailleurs, elle soit indépendante du temps, condition qui s'accomplit lorsqu'on considère seulement la gravité, négligeant les frottements etc.

3.° Que la pression p soit indépendante du temps t Ou ce qui revient au même, qu'elle soit constante pour un même point.

Ces trois conditions sont nécessaires. Elles seraient les conditions pour qu'existe l'intégrale des forces vives, appliquée au mouvement de l'élément fluide, considéré comme un point matériel sur lequel agit la pression et les autres forces extérieures; car la fonction des forces serait: $dU - \frac{I}{\rho} dp$ Et cell-ci doit être indépendante de t .

On requiert, au surplus, ces autres conditions qui sont gratuites:

4.° Qu'il existe φ quand t est variable, ce qui exige que x' y' et z' soient indépendants de t et

5.° Que $\frac{d\varphi}{dt} = 0$.

Pour mettre en évidence les inconvénients de l'hypothèse relative à la fonction φ nous devons l'analyser. Décomposons, à cet effet, les deux parties où figure cette fonction dans l'équation (A). Nous aurons:

$$\delta \frac{d\varphi}{dt} = \frac{d^2\varphi}{dt dx} \delta x + \frac{d^2\varphi}{dt dy} \delta y + \frac{d^2\varphi}{dt dz} \delta z = \frac{dx'}{dt} \delta x + \frac{dy'}{dt} \delta y + \frac{dz'}{dt} \delta z = \frac{d(v \cos \alpha)}{dt} \delta x + \frac{d(v \cos \beta)}{dt} \delta y + \frac{d(v \cos \gamma)}{dt} \delta z = \frac{dv}{dt} \left[\cos \alpha \frac{\delta x}{\delta s} + \cos \beta \frac{\delta y}{\delta s} + \cos \gamma \frac{\delta z}{\delta s} \right] \delta s + v \left[\frac{d \cos \alpha}{dt} \frac{\delta x}{\delta s} + \frac{d \cos \beta}{dt} \frac{\delta y}{\delta s} + \frac{d \cos \gamma}{dt} \frac{\delta z}{\delta s} \right] \delta s$$

$$\text{Et en mettant comme plus haut} \quad \frac{\delta x}{\delta s} = \cos a \quad \frac{\delta y}{\delta s} = \cos b \quad \frac{\delta z}{\delta s} = \cos c$$

nous aurons:

$$\delta \frac{d\varphi}{dt} = \frac{dv}{dt} \cos(ds, \delta s) \delta s + v \left[\frac{d \cos \alpha}{dt} \cos a + \frac{d \cos \beta}{dt} \cos b + \frac{d \cos \gamma}{dt} \cos c \right] \delta s$$

Dans laquelle $\frac{dv}{dt}$ $\frac{d \cos \alpha}{dt}$ $\frac{d \cos \beta}{dt}$ $\frac{d \cos \gamma}{dt}$ représentent des dérivées partielles par rapport à t .

L'autre partie est

$$\begin{aligned} \frac{I}{2} \delta \left[\left(\frac{d\varphi}{dx} \right)^2 + \left(\frac{d\varphi}{dy} \right)^2 + \left(\frac{d\varphi}{dz} \right)^2 \right] &= \frac{d\varphi}{dx} \left[\frac{d}{dx} \frac{d\varphi}{dx} \delta x + \frac{d}{dy} \frac{d\varphi}{dx} \delta y + \frac{d}{dz} \frac{d\varphi}{dx} \delta z \right] + \frac{d\varphi}{dy} \left[\frac{d}{dx} \frac{d\varphi}{dy} \delta x + \frac{d}{dy} \frac{d\varphi}{dy} \delta y + \frac{d}{dz} \frac{d\varphi}{dy} \delta z \right] \\ &+ \frac{d\varphi}{dz} \left[\frac{d}{dx} \frac{d\varphi}{dz} \delta x + \frac{d}{dy} \frac{d\varphi}{dz} \delta y + \frac{d}{dz} \frac{d\varphi}{dz} \delta z \right] = x' \left[\frac{d}{dx} \frac{d\varphi}{dx} \delta x + \frac{d}{dy} \frac{d\varphi}{dx} \delta y + \frac{d}{dz} \frac{d\varphi}{dx} \delta z \right] + y' \left[\frac{d}{dx} \frac{d\varphi}{dy} \delta x + \frac{d}{dy} \frac{d\varphi}{dy} \delta y + \frac{d}{dz} \frac{d\varphi}{dy} \delta z \right] \\ &+ z' \left[\frac{d}{dx} \frac{d\varphi}{dz} \delta x + \frac{d}{dy} \frac{d\varphi}{dz} \delta y + \frac{d}{dz} \frac{d\varphi}{dz} \delta z \right] = x' \left[\frac{d(v \cos \alpha)}{dx} \cos a + \frac{d(v \cos \beta)}{dx} \cos b + \frac{d(v \cos \gamma)}{dx} \cos c \right] \delta s \\ &+ y' \left[\frac{d(v \cos \alpha)}{dy} \cos a + \frac{d(v \cos \beta)}{dy} \cos b + \frac{d(v \cos \gamma)}{dy} \cos c \right] \delta s + z' \left[\frac{d(v \cos \alpha)}{dz} \cos a + \frac{d(v \cos \beta)}{dz} \cos b + \frac{d(v \cos \gamma)}{dz} \cos c \right] \delta s \\ &+ \left[\frac{dv}{dx} x' + \frac{dv}{dy} y' + \frac{dv}{dz} z' \right] \cos \alpha \cos a + \cos \beta \cos b + \cos \gamma \cos c \delta s \\ &+ v \left[\left(\frac{d \cos \alpha}{dx} x' + \frac{d \cos \alpha}{dy} y' + \frac{d \cos \alpha}{dz} z' \right) \cos \alpha + \left(\frac{d \cos \beta}{dx} x' + \frac{d \cos \beta}{dy} y' + \frac{d \cos \beta}{dz} z' \right) \cos b \right. \\ &\quad \left. + \left(\frac{d \cos \gamma}{dx} x' + \frac{d \cos \gamma}{dy} y' + \frac{d \cos \gamma}{dz} z' \right) \cos c \right] \delta s \end{aligned}$$

Ou bien

$$\begin{aligned} \frac{I}{2} \delta \left[\left(\frac{d\varphi}{dx} \right)^2 + \left(\frac{d\varphi}{dy} \right)^2 + \left(\frac{d\varphi}{dz} \right)^2 \right] &= \left[v' - \frac{dv}{dt} \right] \cos(ds, \delta s) \delta s + v \left[\left(\frac{I}{dt} d \cos \alpha - \frac{d \cos \alpha}{dt} \right) \cos a \right. \\ &\quad \left. + \left(\frac{I}{dt} d \cos \beta - \frac{d \cos \beta}{dt} \right) \cos b + \left(\frac{I}{dt} d \cos \gamma - \frac{d \cos \gamma}{dt} \right) \cos c \right] \delta s \end{aligned}$$

Les deux parties réunies nous donnent:

$$\delta \frac{d\varphi}{dt} + \frac{I}{2} \delta \left[\left(\frac{d\varphi}{dx} \right)^2 + \left(\frac{d\varphi}{dy} \right)^2 + \left(\frac{d\varphi}{dz} \right)^2 \right] = v' \cos(ds, \delta s) \delta s + \frac{v^2}{r} \cos(r, \delta s) \delta s.$$

Et, isolées, chacune a deux parties distinctes: l'une, de l'inertie tangentielle, et l'autre, de la centrifuge.

Ainsi donc, nous revenons à l'équation: $\frac{I}{\rho} \delta P = \delta U - v' \cos(ds, \delta s) \delta s - \frac{v^2}{r} \cos(r, \delta s) \delta s$ dans laquelle il suffit seulement que ρ soit constant et p et U indépendants du temps pour déduire le théorème de Bernoulli.

Le théorème de Torricelli à niveau constant se déduit comme celui de Bernoulli. A niveau variable, p dépendra de t mais nous avons, cependant, pu le démontrer. Nous ne reproduirons pas ici cette démonstration, afin de ne pas allonger cet étude.

V

Application à l'atmosphère de la terre.

En prenant, comme auparavant, trois axes rectangulaires dont l'origine soit un point de la surface de la terre dont la latitude géographique soit λ . Et en considérant l'axe des z vertical, l'axe des x une horizontale vers l'est et celui des y une autre vers le sud.

Considérons un élément infinitésimal de la masse d'air dont le volume soit dx, dy, dz et sa masse $dm = \rho dx, dy, dz$ (ρ étant la masse spécifique).

Le poids de cet élément sera, appelant g l'intensité de la gravité $d\omega = -g\rho dx, dy, dz$ et il sera dirigé dans le sens des z négatifs.

Appelons F le frottement, par unité de masse, qui éprouve l'élément d'air dans son mouvement, et soient F_x, F_y, F_z les composantes de cette résistance, selon les axes coordonnés.

Soient dp_x, dp_y et dp_z les différentielles partielles de la pression dans le point occupé par l'élément atmosphérique.

Pour tant, appelant X, Y et Z les composantes, selon les trois axes de toutes ces forces extérieures, nous aurons:

$$X = -dp_x dy dz - F_x \rho dx dy dz \quad Y = -dp_y dx dz - F_y \rho dx dy dz \quad Z = -dp_z dx dy - F_z \rho dx dy dz - g\rho dx dy dz$$

Les axes étant animés par le mouvement de rotation de la terre, le mouvement qu'il s'agit d'étudier,

sera un mouvement relatif. Nous devons, en conséquence, ajouter aux forces antérieures, deux forces fictives appelées *force centrifuge* et *force centrifuge composée*. La première affecte tous les corps qui se trouvent sur la surface de la terre, soit en repos ou en mouvement relatif, et elle, composée avec l'attraction de la terre, a pour résultante ce que nous appelons poids du corps. Par conséquent, si nous considérons que g est le quotient du poids par la masse, cette force centrifuge sera incluse dans la composante Z des forces extérieures. La quantité g n'est pas constante, ce sera une fonction de λ et z ; fonction que nous pouvons considérer connue.

La force centrifuge composée a pour composantes, appelant p , q et r les composantes de la rotation la terre ω et x' , y' et z' étant celles de la vitesse relative:

$$X_t = 2 (ry' - qz') dm \quad Y_t = 2 (pz' - rx') dm \quad Z_t = 2 (qx' - py') dm$$

Or, on a pour valeurs de p , q et r les suivants: $p = 0$ $q = \omega \cos \lambda$ $r = -\omega \sin \lambda$

Donc

$$X_t = -2 \omega (\sin \lambda y' + \cos \lambda z') dm \quad Y_t = 2 \omega \sin \lambda x' dm \quad Z_t = 2 \omega \cos \lambda x' dm.$$

Nous aurons, donc, les équations suivantes de mouvement, en divisant par $dm = \rho dx dy dz$.

$$x'' = -\frac{1}{\rho} \frac{dP}{dx} - F_x - 2 \omega (y' \sin \lambda + z' \cos \lambda) \quad y'' = -\frac{1}{\rho} \frac{dP}{dy} - F_y + 2 \omega x' \sin \lambda \quad (B)$$

$$z'' = -\frac{1}{\rho} \frac{dP}{dz} - F_z + 2 \omega x' \cos \lambda - g.$$

Nous devons ajouter à ces équations celle des gaz permanents: $\frac{P}{\rho g} = R\theta$ dans laquelle $\theta = \text{température absolue}$ et R une constante.

En dégageant les dérivées partielles de la pression nous aurons:

$$\frac{1}{\rho} \frac{dP}{dx} = -x'' - F_x - 2 \omega y' \sin \lambda - 2 \omega z' \cos \lambda \quad \frac{1}{\rho} \frac{dP}{dy} = -y'' - F_y + 2 \omega x' \sin \lambda$$

$$\frac{1}{\rho} \frac{dP}{dz} = -z'' - F_z + 2 \omega x' \cos \lambda - g$$

En appelant, comme plus haut, δs un déplacement arbitraire et $\delta x = \delta s \cos a$, $\delta y = \delta s \cos b$, $\delta z = \delta s \cos c$ ses projections sur les axes, appelant aussi v la vitesse, v' l'accélération et r le rayon de courbure de la trajectoire effective. En additionnant les équations antérieures multipliées respectivement par δx , δy et δz et les réductions faites, nous aurons:

$$\frac{1}{\rho} \delta P = -g \delta z - (F + v') \cos (\delta s, ds) \delta s - \frac{v^2}{r} \cos (r, \delta s) \delta s + 2 \omega \left[\left(\frac{x'}{v} \cdot \frac{\delta y}{v} - \frac{y'}{v} \cdot \frac{\delta x}{v} \right) \sin \lambda + \left(\frac{x'}{v} \cdot \frac{\delta z}{v} - \frac{z'}{v} \cdot \frac{\delta x}{v} \right) \cos \lambda \right] v \delta s \quad (6)$$

Nous devons ajouter:

$$(1) \quad \frac{P}{\rho g} = R\theta. \quad x' = v \cos \alpha \quad y' = v \cos \beta \quad z' = v \cos \gamma \quad \delta x = \delta s \cos a \quad \delta y = \delta s \cos b \quad \delta z = \delta s \cos c$$

Donc

$$\frac{1}{\rho} \delta P = -g \delta z - (F + v') \cos (\delta s, ds) \delta s - \frac{v^2}{r} \cos (r, \delta s) \delta s + 2 \omega [\sin \lambda (\cos \alpha \cos b - \cos \beta \cos a) + \cos \lambda (\cos \alpha \cos c - \cos \gamma \cos a)] v \delta s. \quad (6')$$

Cas particuliers.

1°. Variation horizontale de la pression dans le sens du méridien. Il suffira de faire en (6')

$$\cos a = 0 \quad \cos b = 1 \quad \cos c = 0 \quad \delta z = 0 \quad \text{et} \quad \delta s = \delta y$$

Nous aurons:

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial y} = - (F + v') \cos (\delta y, ds) - \frac{v^2}{r} \cos (r, \delta y) + 2 \omega v \sin \lambda \cos \alpha. \quad (a)$$

2°. Variation horizontale de la pression dans le sens du parallèle. Il suffira de faire en (6')

$$\cos a = 1 \quad \cos b = 0 \quad \cos c = 0 \quad \delta x = \delta s \quad \delta y = 0 \quad \delta z = 0.$$

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} = - (F + v') \cos (\delta x, ds) - \frac{v^2}{r} \cos (r, \delta x) - 2 \omega [\sin \lambda \cos \beta + \cos \lambda \cos \gamma] v. \quad (b)$$

3°. Variation de la pression selon la verticale. Nous aurons en faisant

$$\delta s = \delta z \quad \delta x = 0 \quad \delta y = 0 \quad \cos a = 0 \quad \cos b = 0 \quad \text{et} \quad \cos c = 1$$

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial z} = -g - (F + v') \cos (\delta z, ds) - \frac{v^2}{r} \cos (r, \delta z) + 2 \omega v \cos \lambda \cos \alpha. \quad (c)$$

Et pour obtenir la variation de la pression dans le cas de mouvement horizontal de l'atmosphère on pourra faire: $z' = 0$ et alors $\cos \beta = \sin \alpha$ en procédant d'une manière semblable.

ESTUDIO ANTROPOLOGICO DE LOS DOS PRIMEROS CRANEOS HUMANOS DE LA CULTURA DE SAN AGUSTIN

JOSE PEREZ DE BARRADAS

ex-Arqueólogo del Ministerio de Educación Nacional—Bogotá
ex-Director del Museo Prehistórico Municipal de Madrid—España

Constituía un hecho raro el que hasta 1937 no se hubieran recogido apenas restos humanos en la zona arqueológica de San Agustín, situada, como es sabido, al sur del Huila (Colombia) y cerca de las cabeceras del río Magdalena.

En parte puede atribuirse este hecho a la falta de cuidado con que los "guaqueros"—esa plaga de la Arqueología colombiana que tantos daños ha causado y seguirá causando si no se prohíbe severamente su labor—excavan las sepulturas. Ya dijo E. Restrepo Tirado (1)* en una ocasión, que "es más fácil conseguir objetos de oro de gran valor que huesos de los indios", puesto "que los guaqueros, por considerarlos de ningún valor, arrojan con desprecio a la intemperie los restos humanos de los indígenas; otros, poseídos de ideas supersticiosas, los entierran nuevamente".

Pero por otra parte, es indudable—según pude comprobar en mis excavaciones—que en San Agustín se dan determinadas circunstancias que impiden la conservación de los restos humanos de las antiguas sepulturas.

Este hecho fue comprobado ya por las excavaciones realizadas por el profesor K. Th. Preuss en 1914. Este arqueólogo no encontró en los numerosos sepulcros que excavó "nie die geringste Spur von Skeletten", lo que atribuye a que "das sie vollständig in Staub zerfallen sind, was bei der geringen Tiefe und dem Wechsel von Feuchtigkeit und Trockenheit sehr wohl möglich ist" (2). Personalmente he podido comprobar que el terreno de San Agustín es lo menos propicio para la conservación de los huesos humanos, puesto que se trata de una arcilla sumamente tenaz e hidróscopa. La falta de cal ha hecho, por lo demás, el que las raíces de las plantas, ávidas de cal, hayan sido llevadas por un quimio-tactismo positivo hacia los huesos y hayan contribuido con las alternativas de humedad y sequedad, y con las propiedades físicas de la arcilla, a deshacer e incluso a absorber los huesos humanos. Esto es, para mí, evidente, en los sepulcros de simple fosa abierta en el suelo y para aquellos en que la fosa está revestida y cubierta por losas de piedra, por cuyos intersticios ha penetrado la tierra. En algunos casos la tierra de relleno tiene aún manchas blancas calizas y otras negras producidas por la carbonización de las raíces.

Ya el profesor Preuss insistió en que no podía explicarse el no hallar huesos en los sepulcros por suponer que pudiera tenerse en cuenta la costumbre

de ciertos indios, sobre todo de los valles, de sepulturar los esqueletos, después de la corrupción de las partes blandas, en la tierra o en otros lugares, o de guardarlos en lugares vecinos a sus habitaciones (3). Sobre esta suposición añade el profesor Preuss de manera contundente: "Doch würde damit nicht übereinstimmen, das die Gräber, obwohl grösstenteils von Schatzgräbern gestört, doch z. T. so unversehrt waren, dass ihre schwierige Wiederherstellung nach etwaiger Herausnahme des Skeletts unverständlich wäre. Ehrer kame an sich die Frage in Betracht, ob es sich um leere Gräber als blosser Seelenaufenthalt handele. Dieses muss aber deshalb zurückgewiesen werden, weil anderweitige Bestattung damit nicht in Einklang zu bringen wäre und weil irgend welche Nachrichten über derartige Totenbränche in Amerika fehlen. Zur Erklärung der Inkongruenzen hat man wohl an starke Erderschütterungen zu denken" (4).

La explicación pueril de H. Walde-Waldeg (5) de que los sepulcros con losas fueron hechos en vida de los ocupantes y que las piedras se usaron sólo como marca de propiedad, ni siquiera puede ser tenida en consideración; como tampoco hay que juzgar como un descubrimiento extraordinario el hallazgo de algunas coronas de muelas, en algunas pocas sepulturas de San Agustín, ni hay razón tampoco para presentarlas como prueba de una técnica modelo de excavación.

Por mi parte he recogido, en las 57 sepulturas que pude excavar en San Agustín, durante el tiempo que fui jefe de la Comisión Arqueológica Nacional (6), una serie de restos humanos, por desgracia en su mayoría, en mal estado de conservación. Excepto los dos cráneos que estudio aquí, lo demás no es aprovechable para estudios antropológicos.

Me ocuparé de las circunstancias en que fueron hallados, haré su descripción y presentaré sus medidas e índices.

Desgraciadamente, dada la falta de obras de consulta en Bogotá, este trabajo carecerá de conclusiones, puesto que sería necesario hacer la comparación detenida con la crania americana (7). Por otra parte, dos cráneos, uno de ellos incompleto, no nos pueden dar resultados firmes sobre la raza a que pertenecieron los autores de la cultura prehistórica más importante de Colombia.

CRANEO DE QUEBRADILLAS

Circunstancias del hallazgo: En la zona del Municipio de San Agustín conocida con el nombre de

(1) Las notas del presente escrito se hallan al final del mismo.