LECCIONES DE TRIGONOMETRÍA

POR EL PROFESOR

MANUEL ANTONIO RUEDA

SEGUNDA EDICIÓN

Arjarly
Julio 34.

BOGOTÁ—1926
LIBRERIA COLOMBIANA
CAMACHO ROLDÁN & TAMAYO

LECCIONES DE TRIGONOMETRIA

POR

MANUEL ANTONIO RUEDA

A LOS ESTUDIANTES DE MATEMATICAS

Vosotros sabéis que yo he dedicado a vuestro servicio la parte más preciosa de mi vida, y que desde el año de 1883 me he consagrado a escribir una serie de textos de matemáticas, adecuados al plan de estudios que en estas materias rige entre nosotros. No os sorprenderá, pues, que este nuevo libro, escrito, como los anteriores, en medio de vosotros, os esté especialmente destinado. Dignáos acogerlo como una prenda de cariño del último de vuestros maestros.

No me he propuesto obsequiaros con una obra clásica de matemáticas. Esta es solamente un conjunto de pocas lecciones, conducentes a enseñaros la ciencia del triángulo con método, claridad y eficacia práctica. En ella he suprimido todo desarrollo, toda discusión y toda especulación teórica que no tienda al objeto de que aprendáis Trigonometría científica, fácil y útilmente. De vosotros, los que habéis sido alumnos míos, sabéis por experiencia, que no aventuro una opinión si me atrevo a decir que estas lecciones llenan aquel objeto.

Para la elaboración del texto he tomado por modelos las obras de Briot, F. I. C,, Catalán, Dupuis, Cortázar y Longchamps. No me pertenecen, pues, sino el plan y las aclaraciones de la exposición; y a fe que no es más lo que os ofrezco.

MANUEL ANTONIO RUEDA

Bogotá, 1887.

LECCIONES DE TRIGONOMETRIA

PRIMERA PARTE

TRIGONOMETRIA RECTILINEA

LECCION PRIMERA

Fundamentos de la Trigonometría

1. OBJETO Y DIVISIÓN DE LA TRIGONOMETRÍA—La Trigonometría es el ramo de las Matemáticas que tiene por objeto especial la resolución de triángulos; entendiéndose por *resolver un triángulo*, determinar por medio del cálculo los elementos que no sean conocidos, siempre que se dispongan de datos suficientes que cumplan ciertas condiciones.

La Trigonometría se divide en *rectilínea* y *esférica*. La primera enseña a resolver los triángulos rectilíneos, y la segunda los esféricos.

2. CASOS QUE OCURREN EN LA RESOLUCIÓN DE LOS TRIÁNGULOS RECTILÍNEOS—Todo triángulo rectilíneo consta de seis elementos: tres lados y tres ángulos. Dándose tres de estos elementos, pueden determinarse los otros tres, siempre que entre los datos figure por lo menos un lado.

Para clasificar las cuestiones que pueden ocurrir en la resolución de los triángulos rectilíneos, hacemos distinción entre los triángulos rectángulos y los que no lo son.

En la resolución de los triángulos rectángulos ocurren cuatro casos:

1.° *Dándose la hipotenusa y un ángulo agudo.*
2.° *Dándose un cateto y un ángulo agudo.*
3.° *Dándose la hipotenusa y un cateto.*
4.° *Dándose los dos catetos.*

OBSERVACIÓN—Se notará que en cada uno de estos problemas no hay sino dos datos, habiendo dicho que se requieren tres; pero esto depende de que en todo triángulo rectángulo hay un elemento conocido, que es el ángulo recto.

En la resolución de triángulos rectilíneos que no sean rectángulos ocurren también cuatro cosas:

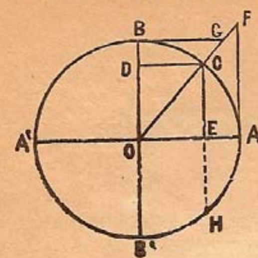
1.° *Dándose un lado y los dos ángulos adyacentes.*
2.° *Dándose dos lados y el ángulo comprendido.*
3.° *Dándose dos lados y el ángulo opuesto a uno de ellos.*
4.° *Dándose los tres lados.*

La resolución de estos ocho problemas es con especialidad el objeto que nos proponemos en esta primera parte.

3. CLASIFICACIÓN DE LAS LÍNEAS TRIGONOMÉTRICAS—Suele definirse la Trigonometría diciendo que es ciencia que trata de las *funciones circulares;* llamándose así ciertas líneas de un círculo dependientes de los ángulos o de los arcos que se consideren en él.

Las funciones circulares, o *relaciones trigonométricas*, o *líneas trigonométricas*, son seis: *el seno, la tangente, la secante, el coseno, la cotangente* y *la cosecante*, que se representan en los cálculos, respectivamente, por estas abreviaciones: *sen, tang, sec, cos, cot* y *cosec.*

Para adquirir el conocimiento de estas líneas, tracemos un círculo, y convengamos en llamarlo *círculo trigonométrico*. Dividamos este círculo en cuatro cuadrantes, por medio de los diámetros perpendiculares AA' y BB' (Fig. 1.ª)



(Fig. 1.ª)

A partir del punto A, que llamaremos *el origen de los arcos*, tomemos el arco AC, y bajemos sobre el radio OA la perpendicular CE.

La relación entre esta perpendicular y el radio del círculo es lo que se llama el *seno* del arco AC, o del ángulo AOC. De modo que el *seno de un arco es la relación que tiene con el radio del círculo la perpendicular bajada desde el extremo del arco sobre el diámetro que pasa por el origen*. Por consiguiente:

$$\text{sen AC} = \frac{\text{CE}}{\text{OA}} \qquad (1)$$

Tracemos por el punto A una tangente, hasta que encuentre a la prolongación del radio OC, en el punto F. La relación entre la línea AF y el radio del círculo es lo que se llama la *tangente trigonométrica* del arco AC, o del ángulo AOC. De modo que *la tangente trigonométrica de un arco es la relación que tiene con el radio del círculo la porción de tangente geométrica comprendida entre el origen y la prolongación del radio que pasa por el extremo del arco*. Por consiguiente:

$$\text{tang AC} = \frac{\text{AF}}{\text{OA}} \qquad (2)$$

La relación que tiene la línea OF con el radio del círculo es lo que se llama la *secante* del arco AC, o del ángulo AOC. De modo que *la secante de un arco es la relación que tiene con el radio del círculo la recta que junta el centro del círculo con la extremidad de la tangente*. Por consiguiente:

$$\text{sec AC} = \frac{\text{OF}}{\text{OA}} \qquad (3)$$

Considerando ahora el arco BC, complemento de AC, tenemos:

$$\text{sen BC} = \frac{\text{CD}}{\text{OB}} = \text{cos. AC} \qquad (4)$$

$$\text{tang BC} = \frac{\text{BG}}{\text{OB}} = \text{cot. AC} \qquad (5)$$

$$\text{sec BC} = \frac{\text{OG}}{\text{OB}} = \text{cosec. AC} \qquad (6)$$

Estas relaciones son, repectivamente, *el coseno, la cotangente* y *la cosecante* del arco AC. De modo que:

El coseno de un arco es el seno del arco complementario. La cotangente de un arco es la tangente del arco complementario. La cosecante de un arco es la secante del arco complementario.

Nota 1.ª—El radio del círculo trigonométrico se supone ser igual a la unidad; y de esto resulta que en Trigonometría la circunferencia se represeta por 2π, la semicircunferencia por π, un cuadrante por $\frac{\pi}{2}$ y tres cuadrantes por $\frac{3\pi}{2}$.

De esta convención resulta también que el complemento del arco a se representa por $\frac{\pi}{2} - a$, y que su suplemento se representa por $\pi - a$.

Nota 2.ª—Siendo la unidad el radio del círculo trigonométrico, las relaciones (1), (2), (3), (4), (5) y (6) se convierten en las siguientes:

$$\begin{array}{ll} \text{sen} & \text{AC} = \text{CE} \\ \text{tang} & \text{AC} = \text{AF} \\ \text{sec} & \text{AC} = \text{OF} \\ \text{cos} & \text{AC} = \text{CD} \\ \text{cot} & \text{AC} = \text{BG} \\ \text{cosec} & \text{AC} = \text{OG} \end{array}$$

Por tanto, las definiciones de las líneas trigonométricas seno, tangente y secante pueden reemplanzarse por las siguientes:

El seno de un arco es la longitud de la perpendicular llevada desde el extremo del arco sobre el radio que pasa sobre el origen.

La tangente trigonométrica de un arco es la porción de tangente geométrica compren-

dida entre el origen y la prolongación del radio que pasa por el extremo del arco.

La secante de un arco es la recta que junta el centro del círculo con el extremo de la tangente.

NOTA 3.ª—Siendo la línea CD el coseno del arco AC, y siendo dicha línea igual a OE, podemos decir:

El coseno de un arco es la distancia del centro del círculo al pie del seno.

NOTA 4.ª—Si prolongamos el seno CE, hasta que encuentre a la circunferencia en el punto H, queda dividida la línea CH en dos partes iguales en el punto E, en virtud de un teorema de Geometría; así como también queda siendo el punto A la mitad del arco CAH. Por esa razón se dice:

El seno de un arco es la mitad de la cuerda del arco duplo.

4. VARIACIONES EN LOS SIGNOS DE LAS LÍNEAS TRIGONOMÉTRICAS—En Trigonometría se consideran arcos de todas magnitudes y de todos sentidos, para dar generalidad al estudio. Fácil es imaginar la variación de los arcos, suponiendo un móvil que, a partir del punto A, recorra la circunferencia en el sentido $ABA'B'A$.

Cuando el móvil está en A, el arco recorrido es nulo; cuando está en B, es igual a $\frac{\pi}{2}$; cuando está en A', el arco es igual a π; cuando está en B', el arco es igual a $\frac{3\pi}{2}$; y cuando vuelve a A, el arco es igual 2π. El móvil podría continuar recorriendo la circunferencia un número cualquiera de veces; de modo que los arcos pueden tener todos los valores desde 0 hasta $+\infty$.

Pero si el móvil, en lugar de moverse en el sentido $ABA'B'A$, se mueve en el sentido $AB'A'BA$, se consideran como negativos los arcos recorridos, y resulta que en ese otro sentido pueden los arcos variar desde 0 hasta $-\infty$.

Según esto, las líneas trigonométricas pueden tener signos y valores variables, dependientes de las variaciones de los arcos; y hé ahí por qué se les llama *funciones circulares*.

Tratamos de saber cómo se verifica la variación en los signos, a medida que los arcos varían; y para esto sentamos ante todo la siguiente

REGLA – *El seno y la tangente son positivos cuando están encima del diámetro horizontal, y negativos cuando están debajo. El coseno y la cotangente son positivos cuando están a la derecha del diámetro vertical, y negativos cuando están a la izquierda. La secante y la cosecante son positivas cuando pasan por el extremo del arco, y negativas en el caso contrario.*

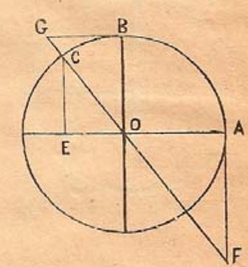
De conformidad con esta regla, vamos a deducir los signos que tienen las líneas trigonométricas en los cuatro cuadrantes del círculo.

PRIMER CUADRANTE (Véase la fig. 1.ª)

$$\text{Arco AC}\left\{\begin{array}{ll} \textit{Seno: } \text{CE}\ldots\ldots\ldots & \text{positivo.} \\ \textit{Coseno: } \text{OE}\ldots\ldots & \text{»} \\ \textit{Tangente: } \text{AF}\ldots\ldots & \text{»} \\ \textit{Cotangente: } \text{BG}\ldots & \text{»} \\ \textit{Secante: } \text{OF}\ldots\ldots & \text{»} \\ \textit{Cosecante: } \text{OG}\ldots & \text{»} \end{array}\right.$$

Cuando un arco termina en el primer cuadrante, todas las líneas trigonométricas son positivas.

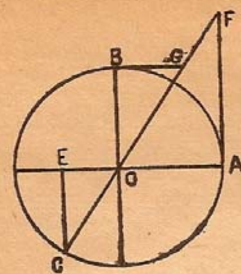
SEGUNDO CUADRANTE (fig. 2.ª)



$$\text{Arco AC}\left\{\begin{array}{ll} \textit{Seno: } \text{CE}\ldots\ldots\ldots & \text{positivo.} \\ \textit{Coseno: } \text{OE}\ldots\ldots & \text{negativo.} \\ \textit{Tangente: } \text{AF}\ldots\ldots & \text{»} \\ \textit{Cotangente: } \text{BG}\ldots & \text{»} \\ \textit{Secante: } \text{OF}\ldots\ldots & \text{»} \\ \textit{Cosecante: } \text{OG}\ldots & \text{positiva.} \end{array}\right.$$

Cuando un arco termina en el segundo cuadrante, todas las líneas trigonométricas son negativas, con excepción del seno y de la cosecante.

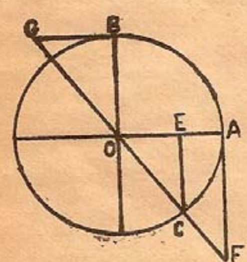
TERCER CUADRANTE (fig. 3.ª)



$$\text{Arco AC}\begin{cases}\textit{Seno: } CE \ldots\ldots & \text{negativo.}\\ \textit{Coseno: } OE \ldots\ldots & \text{»}\\ \textit{Tangente: } AF \ldots\ldots & \text{positiva.}\\ \textit{Cotangente: } BG \ldots & \text{»}\\ \textit{Secante: } OF \ldots\ldots & \text{negativa.}\\ \textit{Cosecante: } OG \ldots, & \text{»}\end{cases}$$

Cuando un arco termina en el tercer cuadrante, todas las líneas trigonométricas son negativas, con excepción de la tangente y de la cotangente.

CUARTO CUADRANTE (fig. 4.ª)



$$\text{Arco AC}\begin{cases}\textit{Seno: } CE \ldots\ldots\ldots & \text{negativo.}\\ \textit{Coseno: } OE \ldots\ldots & \text{positivo.}\\ \textit{Tangente: } AF \ldots\ldots & \text{negativa.}\\ \textit{Cotangente: } BG \ldots & \text{»}\\ \textit{Secante: } OF \ldots\ldots & \text{positiva.}\\ \textit{Cosecante: } OG \ldots\ldots & \text{negativa.}\end{cases}$$

Cuando un arco termina en el cuarto cuadrante, todas las líneas trigonométricas son negativas, con excepción del coseno y de la secante.

5. VARIACIONES EN LOS VALORES DE LAS LÍNEAS TRIGONOMÉTRICAS — Nos proponemos ahora saber qué valores van tomando las líneas trigonométricas de un arco, a medida que el móvil imaginario, partiendo del origen A, va ocupando sucesivas posiciones en la circunferencia.

VARIACIONES DEL SENO

sen $0°=0$, porque el extremo del arco es el mismo origen.

sen $\frac{\pi}{2}=1$, porque el seno se iguala con el radio.

sen $\pi=0$, porque la perpendicular se anula.

sen $\frac{3\pi}{2}=-1$, porque el seno es negativo, y se iguala con el radio.

sen $2\pi=0$, porque la perpendicular se anula.

VARIACIONES DEL COSENO

cos $0°=1$, porque el coseno se iguala con el radio.

cos $\frac{\pi}{2}=0$, porque el pie del seno es el centro del círculo.

cos $\pi=-1$, porque el coseno es negativo, y se iguala con el radio.

cos $\frac{3\pi}{2}=0$, porque el pie del seno es el centro del círculo.

cos $2\pi=1$, porque el coseno se iguala con el radio

VARIACIONES DE LA TANGENTE

tang $0°=0$, porque el extremo del arco es el mismo origen.

tang $\frac{\pi}{2}=\infty$, porque es paralelo a la tangente el radio que pasa por el extremo del arco.

tang $\pi=0$, porque el radio que pasa por el extremo del arco pasa también por el origen

tang $\frac{3\pi}{2}=-\infty$, porque es paralelo a la tangente al radio que pasa, etc.

tang $2\pi=0$, porque el extremo del arco se cofunde con el origen.

VARIACIONES DE LA COTANGENTE

cot $0°=\infty$, porque es paralela al radio

cot $\frac{\pi}{2}=0$, porque el punto de partida de la cotangente se confunde con el extremo del arco.

cot $\pi = -\infty$, porque es negativa y paralela al radio.

cot $\frac{3\pi}{2} = 0$, porque el radio que va a encontrar a la tangente pasa por el punto de partida de la cotangente.

cot $2\pi = \infty$, porque es paralela al radio.

VARIACIONES DE LA SECANTE

sec $0° = 1$, porque es igual al radio.

sec $\frac{\pi}{2} = \infty$, porque es paralela a la tangente.

sec $\pi = -1$, porque es negativa, e igual al radio.

sec $\frac{3\pi}{2} = -\infty$, porque es negativa, y paralela a la tangente.

sec $2\pi = 1$, porque vuelve a ser igual al radio.

VARIACIONES DE LA COSECANTE

cosec $0° = \infty$, porque es paralela a la cotangente.

cosec $\frac{\pi}{2} = 1$, porque es igual al radio.

cosec $\pi = \infty$, porque es paralela a la cotangente.

cosec $\frac{3\pi}{2} = -1$, porque es negativa, e igual al radio.

cosec $2\pi = \infty$, porque es paralela a la cotangente.

De lo dicho se desprende:

1.° *En el primer cuadrante el* SENO *crece de 0 a 1; en el segundo, decrece de 1 a 0; en el tercero decrece de 0 a —1; y en el cuarto crece de —1 a 0.*

2.° *En el primer cuadrante, el* COSENO *decrece de 1 a 0; en el segundo, decrece de 0 a —1; en el tercero, crece de —1 a 0; y en el cuarto, crece de 0 a 1.*

3.° *En el primer cuadrante, la* TANGENTE *crece de 0 a + ∞; en el segundo, pasa bruscamente de + ∞ a — ∞, y crece de — ∞ a 0; en el tercero, crece de 0 a + ∞, y en el cuarto, pasa bruscamente de + ∞ a — ∞, y crece de — ∞ a 0.*

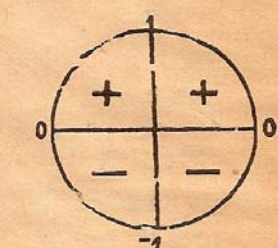
4.° *En el primer cuadrante, la* COTANGENTE *decrece de + ∞ a 0; en el segundo, decrece de 0 a — ∞; en el tercero, pasa bruscamente de — ∞ a + ∞, y decrece de + ∞ a 0: y en el cuarto, decrece de 0 a — ∞, y pasa bruscamente a + ∞ cuando el móvil ha recorrido toda la circunferencia.*

5.° *En el primer cuadrante la* SECANTE *crece de 1 a + ∞; en el segundo, pasa bruscamente de + ∞ a — ∞, y crece de — ∞ a —1; en el tercero, decrece de —1 a — ∞; y en el cuarto, pasa bruscamente de — ∞ a + ∞, y decrece de + ∞ a 1.*

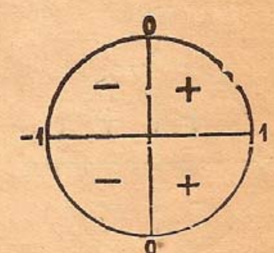
6.° *En el primer cuadrante, la* COSECANTE *decrece de + ∞ a 1; en el segundo, crece de 1 a — ∞; en el tercero, pasa bruscamente de + ∞ a — ∞, y crece de — ∞ a 1; y en el cuarto, decrece de —1 a — ∞ para pasar bruscamente a + ∞ cuando el móvil ha recorrido toda la circuferencia.*

6. RERUMEN GRAFICO DE LOS DOS ARTÍCULOS ANTERIORES—Como resumen de todo lo dicho respecto de las líneas trigonométricas en los cuatro cuadrantes del círculo, obsérvense las figuras 5.ª, 6.ª, 7.ª, 8.ª, 9.ª y 10.ª, que dan una idea clara y completa de dichas variaciones.

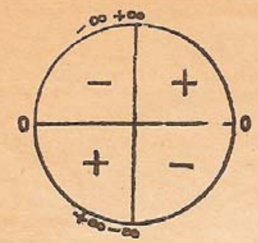
SENO (fig. 5.ª)



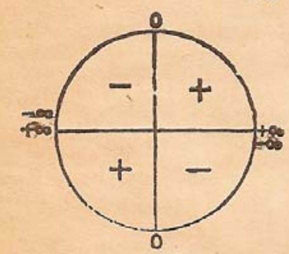
COSENO (fig. 6.ª)



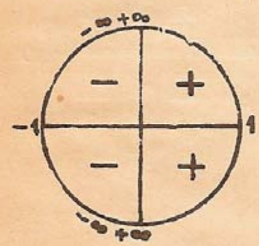
TANGENTE (fig. 7.ª)



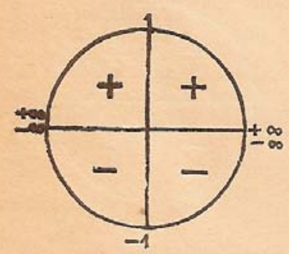
COTANGENTE (fig. 8.ª)



SECANTE (fig. 9.ª)



COSECANTE (fig. 10.ª)



Nota 1.ª—Se dice que una cantidad es *función periódica* de otra, cuando aumentando esta otra en una cantidad determinada, llamada *amplitud del período*, vuelve aquélla a tomar el mismo valor. Según esto, podemos decir que las líneas trigonométricas son funciones periódicas de los arcos.

El período del seno es 2π; el del coseno es 2π; el de la tangente es π; el de la cotangente es π; el de la secante es 2π; y de la cosecante es 2π.

Nota 2.ª—De todo el análisis que hemos hecho se desprenden las siguientes consecuencias:

1.ª *Todo número positivo o negativo puede representar una tangente o una cotangente.*

2.ª *Todo número mayor que $+1$ o menor que -1 puede representar una secante o una cosecante.*

3.ª *Todo número comprendido entre -1 y $+1$ puede representar un seno o un coseno.*

7. Relaciones entre las líneas trigonométricas de los arcos que difieren en un número completo de circunferencias—Si dos arcos difieren en una o más circunferencias, y tienen un mismo origen, es claro que terminan en el mismo punto, y tendrán, por consiguiente, las mismas líneas trigonométricas.

8. Relaciones entre las líneas trigonométricas de dos arcos suplementarios—*Las líneas trigonométricas de dos arcos suplementarios son iguales y de signos contrarios, con excepción del seno y de la cosecante que son iguales en valor y en signo.*

Sean AC y AC' (fig. 11) dos arcos suplementarios. Los extremos de estos arcos deberán estar en una paralela al diámetro AA'.

El seno del primer arco es CE, y el del segundo es $C'E'$; iguales y del mismo signo.

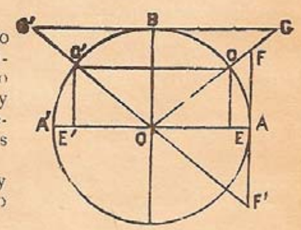


Fig. 11

El coseno del primer arcos OE y el del segundo es OE'. Estos cosenos son de signos contrarios, y son iguales. En efecto, los triángulos OCE y $OC'E'$ son iguales, porque tienen: OC=OC', por radios de un mismo círculo; CE=C'E', por partes de paralelas comprendidas entre paralelas; y CEO=C'E'O, por rectos. Por consiguiente, OE=OE'.

La tangente del primer arco es AF, y la del segundo es AF'. Estas tangentes son de signos contrarios. y son iguales. En efecto, los triángulos OAF y OAF' son iguales, por tener: los ángulos en A iguales, por rectos; el lado OA común; los ángulos FOA y $F'OA$ iguales, porque cada uno de ellos es igual al ángulo $C'OA'$. Por consiguiente, $AF=AF'$.

La cotangente del primer arco es BG, y la segundo es BG'. Estas cotangentes son de signos contrarios, y son iguales. En efecto, los triángulos OBG y OBG' son iguales por tener: los ángulos en B iguales, por rectos; el lado OB común; y los ángulos en O iguales, por ser complementos de ángulos iguales. Por consiguiente, BG=BG'.

La secante del primer arco es OF, y la del segundo es OF'. Estas secantes son de signos contrarios, y son iguales, en virtud de la igualdad de los triángulos OAF y OAF'.

La cosecante del primer arco es OG, y la del segundo es OG'. Estas cosecantes son positivas, y son iguales, en virtud de la igualdad de los triángulos OBG y OBG'.

Estas relaciones se traducen de la manera siguiente:

$$\begin{aligned} \text{sen}\ (\pi-a) &= \text{sen}\ a \\ \cos\ (\pi-a) &= -\cos\ a \\ \text{tang}\ (\pi-a) &= -\text{tang}\ a \\ \cot\ (\pi-a) &= -\cot\ a \\ \sec\ (\pi-a) &= -\sec\ a \\ \text{cosec}\ (\pi-a) &= \text{cosec}\ a \end{aligned}$$

9. Relaciones entre las líneas trigonométricas de dos arcos iguales y de signos contrarios—*Las líneas trigonométricas de dos arcos iguales y de signos contrarios, son iguales y de signos contrarios, con excepción del coseno y de la secante, que son iguales en valor y en signo.*

Sea AC (fig. 12) un arco positivo, y AC' un arco negativo igual al anterior.

El seno del primer arco es CE, y el del segundo es $C'E$. Estos senos son de signos contrarios; y son iguales, porque el radio OA divide en dos partes iguales la cuerda CC', en virtud de un teorema de Geometría.

El coseno del primer arco es OE y el del segundo es también OE. Los cosenos son, pues, iguales en valor y en signo.

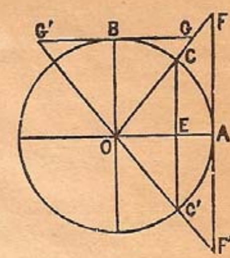


Fig. 12

La tangente del primer arco es AF, y la del segundo es AF'. Estas tangentes son de signos contrarios, y son iguales. En efecto, los triángulos OAF y OAF' son iguales, por tener: el lado OA común; los ángulos en A iguales por rectos; y los ángulos en O iguales por tener medidas iguales. Por consiguiente, $AF=AF'$.

La cotangente del primer arco es BG, y la del segundo es BG'. Estas cotangentes son de signos contrarios, y son iguales. En efecto, los triángulos OBG y OBG' son iguales, por tener: el lado OB común; los ángulos en B son iguales por rectos; y los ángulos en O iguales, por ser complementos de ángulos iguales. Por consiguiente, $BG=BG'$.

La secante del primer arco es OF, y la del segundo es OF'. Estas secantes son ambas positivas; y son iguales, en virtud de la igualdad de los triángulos OAF y OAF.

La cosecante del primer arco es OG, y la del segundo es OG'. Estas cosecantes son de signos contrarios; y son iguales, por la igualdad de los triángulos OBG y OBG'.

Las relaciones que dejamos explicadas en este artículo se indican de la manera siguiente:

$$\begin{aligned} \text{sen}\ (-a) &= -\text{sen}\ a \\ \cos\ (-a) &= \cos\ a \\ \text{tang}\ (-a) &= -\text{tang}\ a \\ \cot\ (-a) &= -\cot\ a \\ \sec\ (-a) &= \sec\ a \\ \text{cosec}\ (-a) &= -\text{cosec}\ a \end{aligned}$$

10. Relaciones entre las líneas trigonométricas de dos arcos que difieren en una semicircunferencia — *Las líneas trigonométricas de dos arcos que difieren en una semicircunferencia son iguales y de signos contrarios, con excepción de la tangente y de la cotangente, que son iguales en valor y en signo.*

Sean AC y AC' (fig. 13) dos arcos que difieren en una semicircunferencia:

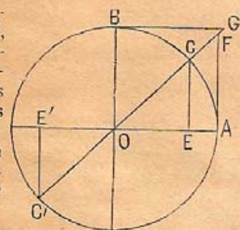


Fig. 13

El seno del primer arco es CE, y el del segundo es $C'E'$. Estos dos senos son de signos contrarios, y son iguales. En efecto, los triángulos OCE y $OC'E'$ son iguales, por tener: OC=OC', por radios de un mismo círculo; los ángulos en O iguales, por opuestos por el vértice; y los ángulos E y E' iguales por rectos. Por consiguiente, CE=C'E'.

El coseno del primer arco es OE, y el del segundo es OE'. Estos cosenos son de signos contrarios, y son iguales, por la igualdad de los triángulos OCE y $OC'E'$.

La tangente del primer arco es AF, y la del segundo es también AF. Las tangentes son, pues, iguales en valor y en signo.

La cotangente del primer arco es BG, y la del segundo es también BG. Las cotangentes son, pues, iguales en valor y en signo.

La secante del primer arco es OF, y la del segundo es también OF; pero con respecto al primero es positiva, y con respecto al segundo es negativa.

La cosecante del primero es OG, y la del segundo es también OG, pero con respecto al primero es positiva, y con respecto al segundo es negativa.

Las relaciones que hemos explicado en este artículo se indican de la manera siguiente:

$$\begin{aligned}
&\text{sen}\ (\pi+a)=-\text{sen}\ a\\
&\cos\ (\pi+a)=-\cos\ a\\
&\text{tang}\ (\pi+a)=\text{tang}\ a\\
&\cot\ (\pi+a)=\cot\ a\\
&\sec\ (\pi+a)=-\sec\ a\\
&\text{cosec}\ (\pi+a)=-\text{cosec}\ a
\end{aligned}$$

11. Relaciones entre las líneas trigonométricas de dos arcos que difieren en un cuadrante— *Las líneas trigonométricas de un arco son iguales y de signos contrarios a las líneas complementarias de otro arco que difiera del primero en un cuadrante; con excepción del coseno y de la secante del primer arco, que son iguales en valor y en signo al seno y a la cosecante del segundo arco, respectivamente.*

Sean AC y AC' (fig. 14) dos arcos que difieren en un cuadrante.

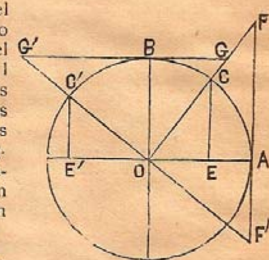


Fig. 14

El seno del primer arco es CE, y el coseno del segundo es OE'. Estas dos líneas son de signos contrarios, y son iguales. En efecto, los triángulos OCE y $OC'E'$ son iguales por tener: $OC=OC'$ por radios de un mismo círculo; el ángulo E igual al E' por rectos; y el ángulo COE igual al $OC'E'$, porque cada uno de ellos tiene por complemento a $C'OE'$. Por consiguiente, $CE=OE'$.

El coseno del primer arco es OE, y el seno del segundo es $C'E'$. Estas dos líneas son positivas; y son iguales, en virtud de la igualdad de los triángulos OCE y $OC'E'$.

La tangente del primer arco es AF, y la cotangente del segundo es BG'. Estas dos líneas son de signos contrarios, y son iguales. En efecto, los triángulos OAF y OBG' son iguales, por tener: $OA=OB$, por radios de un mismo círculo; el ángulo en A igual al ángulo en B, por rectos; y los ángulos en O iguales, por tener el mismo complemento. Por consiguiente, $AF=BG'$.

La cotangente del primer arco es BG, y la tangente del segundo es AF'. Estas dos líneas son de signos contrarios, y son iguales. En efecto, los triángulos BOG y AOF' son iguales, por tener: $AO=OB$, por radios de un mismo círculo; el ángulo en A igual al ángulo en B, por rectos; y los ángulos en O iguales, por tener el mismo complemento. Por consiguiente, $BG=AF'$.

La secante del primer arco es OF, y la cosecante del segundo arco es OG'. Estas dos líneas son positivas; y son iguales, por la igualdad de los triángulos OAF y OBG'.

La cosecante del primer arco es OG, y la secante del segundo es OF'. Estas dos líneas son de signos contrarios, y son iguales, por la igualdad de los triángulos OBG y OAF'.

Las relaciones que hemos explicado en este artículo se indican de la manera siguiente:

$$\text{sen}\left(\frac{\pi}{2}+a\right)=\cos a$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}+a\right)=-\text{sen}\ a$$

$$\text{tang}\left(\frac{\pi}{2}+a\right)=-\cot a$$

$$\cot\left(\frac{\pi}{2}+a\right)=-\text{tang}\ a$$

$$\sec\left(\frac{\pi}{2}+a\right)=-\text{cosec}\ a$$

$$\text{cosec}\left(\frac{\pi}{2}+a\right)=\sec a$$

LECCION SEGUNDA

Fórmulas principales de la Trigonometría rectilínea

12. FÓRMULAS FUNDAMENTALES — Las fórmulas fundamentales de la Trigonometría rectilínea son cinco.

Primera fórmula....... $\text{sen}^2 a+\cos^2 a=1$

Designemos por a un arco AC (fig. 14) tomado en el primer cuadrante, y consideremos el triángulo rectángulo OCE. Tenemos:

$$CE^2+OE^2=OC^2$$

o sea:

$$\text{sen}^2 a+\cos^2 a=1$$

Segunda fórmula..... $\text{tang}\ a=\dfrac{\text{sen}\ a}{\cos a}$

Comparando los triángulos semejantes OCE y OFA (fig. 14), se tiene:

$$AF : CE=OA : OE$$

o sea:

$$\text{tang}\ a : \text{sen}\ a=1 : \cos a$$

de donde:

$$\text{tang}\ a=\frac{\text{sen}\ a}{\cos a}$$

Tercera fórmula..... $\cot a=\dfrac{\cos a}{\text{sen}\ a}$

Si en la fórmula anterior ponemos $\frac{\pi}{2}-a$ en lugar de a, se tiene:

$$\text{tang}\left(\frac{\pi}{2}-a\right)=\frac{\text{sen}\left(\frac{\pi}{2}-a\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{2}-a\right)}$$

o sea:

$$\cot a=\frac{\cos a}{\text{sen}\ a}$$

NOTA—De esta última fórmula resulta que *la cotangente es el inverso de la tangente;* de suerte que

$$\cot a=\frac{1}{\text{tang}\ a}$$

Cuarta fórmula..... $\sec a=\dfrac{1}{\cos a}$

De la comparación de los mismos triángulos OCE y OFA, resulta:

$$OF : OC=OA : OE$$

o sea:

$$\sec a : 1=1 : \cos a$$

de donde:

$$\sec a=\frac{1}{\cos a}$$

Quinta fórmula..... $\operatorname{cosec} a = \frac{1}{\operatorname{sen} a}$

Si en la fórmula anterior ponemos $\frac{\pi}{2} - a$ en lugar de a, se tiene:

$$\sec\left(\frac{\pi}{2} - a\right) = \frac{1}{\cos\left(\frac{\pi}{2} - a\right)}$$

o sea:

$$\operatorname{cosec} a = \frac{1}{\operatorname{sen} a}$$

13. Seno y coseno en función de la tangente— Por medio de las fórmulas fundamentales pueden expresarse todas las líneas trigonométricas de un arco en función de una cualquiera de ellas; y como ejemplo de esto ¡vamos a expresar el seno y el coseno en función de la tangente.

La segunda fórmula fundamental dice así:

$$\operatorname{tang} a = \frac{\operatorname{sen} a}{\cos a}$$

que puede escribirse así:

$$\frac{\operatorname{tang} a}{1} = \frac{\operatorname{sen} a}{\cos a}$$

Elevando el cuadrado, resulta:

$$\frac{\operatorname{tang}^2 a}{1} = \frac{\operatorname{sen}^2 a}{\cos^2 a}$$

Comparando esta proporción, tenemos:

$$\frac{1 + \operatorname{tang}^2 a}{\operatorname{tang}^2 a} = \frac{\operatorname{sen}^2 a + \cos^2 a}{\operatorname{sen}^2 a} = \frac{1}{\operatorname{sen}^2 a}$$

o también:

$$\frac{1 + \operatorname{tang}^2 a}{1} = \frac{\operatorname{sen}^2 a + \cos^2 a}{\cos^2 a} = \frac{1}{\cos^2 a}$$

De la primera resulta:

$$\operatorname{sen} a = \frac{\operatorname{tang} a}{\pm\sqrt{1 + \operatorname{tang}^2 a}}$$

De la segunda resulta:

$$\cos a = \frac{1}{\pm\sqrt{1 + \operatorname{tang}^2 a}}$$

Estas dos últimas expresiones son las que nos propusimos buscar.

Nota—Las demás líneas trigonométricas pueden también expresarse en función de la tangente, después de haber expresado el seno y el coseno; porque la secante es función del coseno, la cosecante es función del seno, y la cotangente se función del seno y del coseno.

14. Seno y coseno de la suma de dos arcos—Dándose el seno y el coseno de dos arcos a y b, podemos encontrar el seno y el coseno de la suma $(a+b)$, de la manera que vamos a explicar.

Sean AB y BC (fig. 15) los arcos a y b, respectivamente. Juntemos el centro O con el punto B; bajemos del punto C la perpendicular CM sobre OB; bajemos sobre el radio OA las perpendiculares CE, MN y BD; y últimamente, tracemos por el punto M la perpendicular MQ a la línea CE.

De esta construcción resulta que la línea CE es el seno del arco $(a+b)$, y que la línea OE es el coseno de dicho arco. De manera que se tiene:

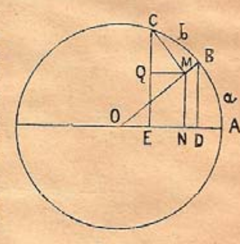


Fig. 15

$$\begin{aligned} CE &= \operatorname{sen}(a+b) \\ OE &= \cos(a+b) \end{aligned}$$

También tenemos:

$$CE = MN + CQ \quad (m)$$
$$OE = ON - MQ \quad (n)$$

Comparando los dos triángulos CMQ y OBD, que son semejantes, por tener sus lados respectivamente perpendiculares, tenemos estas dos proporciones:

$$CQ : OD = CM : OB$$
$$MQ : BD = CM : OB$$

Comparando los dos triángulos semejantes OMN y OBD, tenemos estas dos proporciones:

$$MN : BD = OM : OB$$
$$ON : OD = OM : OB$$

De la primera proporción sacamos:

$$CQ = CM \times OD = \text{sen } b \cos a \qquad (1)$$

De la segunda proporción sale:

$$MQ = BD \times CM = \text{sen } a \text{ sen } b \qquad (2)$$

De la tercera proporción sacamos:

$$MN = BD \times OM = \text{sen } a \cos b \qquad (3)$$

De la cuarta proporción resulta:

$$ON = OD + OM = \cos a \cos b \qquad (4)$$

Sustituyendo los valores (1), (2), (3) y (4) en las igualdades (m) y (n), tenemos:

$$\text{sen } (a+b) = \text{sen } a \cos b + \text{sen } b \cos a$$
$$\cos (a+b) = \cos a \cos b - \text{sen } a \text{ sen } b$$

15. Seno y coseno de la diferencia de dos arcos — Si en las fórmulas que acabamos de encontrar ponemos $-b$ en lugar de b, tenemos:

$$\text{sen } (a-b) = \text{sen } a \cos (-b) + \text{sen } (-b) \cos a$$
$$\cos (a-b) = \cos a \cos (-b) - \text{sen } a \text{ sen } (-b)$$

o sea (art. 9):

$$\text{sen } (a-b) = \text{sen } a \cos b - \text{sen } b \cos a$$
$$\cos (a-b) = \cos a \cos b + \text{sen } a \text{ sen } b$$

16. Tangente de las sumas de los arcos — Haciendo uso de la fórmula fundamental

$$\text{tang } a = \frac{\text{sen } a}{\cos a}$$

tenemos:

$$\text{tang } (a+b) = \frac{\text{sen } (a+b)}{\cos (a+b)}$$

o sea:

$$\text{tang. } (a+b) = \frac{\text{sen } a \cos b + \text{sen } b \cos a}{\cos a \cos b - \text{sen } a \text{ sen } b}$$

Dividiendo por *cos. a cos. b* los dos términos del segundo miembro, se tiene:

$$\text{tang } (a+b) = \frac{\text{tang } a + \text{tang } b}{1 - \text{tang } a \text{ tang } b}$$

17. Tangente de la diferencia de dos arcos — Haciendo uso de la misma fórmula

$$\text{tang } a = \frac{\text{sen } a}{\cos a}$$

tenemos:

$$\text{tang } (a-b) = \frac{\text{sen } (a-b)}{\cos (a-b)}$$

o sea:

$$\text{tang } (a-b) = \frac{\text{sen } a \cos b - \text{sen } b \cos a}{\cos a \cos b + \text{sen } a \text{ sen } b}$$

Dividiendo por *cos* a *cos* b los dos términos del segundo miembro, se tiene:

$$\text{tang } (a-b) = \frac{\text{tang } a - \text{tang } b}{1 + \text{tang } a \text{ tang } b}$$

18. Fórmulas de *sen. 2a, cos. 2a* y *tang. 2a*. Haciendo $b = a$ en las fórmulas de *sen.* $(a+b)$, *cos.* $(a+b)$ y *tang.* $(a+b)$, nos resulta:

$$\text{sen } 2a = 2 \text{ sen } a \cos a$$
$$\cos 2a = \cos^2 a - \text{sen}^2 a$$
$$\text{tang } 2a = \frac{2 \text{ tang } a}{1 - \text{tang}^2 a}$$

Nota — Si en estas últimas fórmulas ponemos $\frac{a}{2}$ en lugar de a, obtenemos las siguientes de uso muy frecuente:

$$\text{sen } a = 2 \text{ sen } \tfrac{1}{2} a \cos \tfrac{1}{2} a$$
$$\cos a = \cos^2 \tfrac{1}{2} a - \text{sen}^2 \tfrac{1}{2} a$$
$$\text{tang } a = \frac{2 \text{ tang } \frac{1}{2} a}{1 - \text{tang}^2 \frac{1}{2} a}$$

19. Fórmulas de *sen* $\frac{1}{2} a$, *cos* $\frac{1}{2} a$ y *tang* $\frac{1}{2} a$. Ya sabemos que

$$\cos a = \cos^2 \tfrac{1}{2} a - \text{sen}^2 \tfrac{1}{2} a$$

Y en virtud de la primera fórmula fundamental tenemos también:

$$\text{sen}^2 \tfrac{1}{2} a + \cos^2 \tfrac{1}{2} a = 1$$

Restando estas dos igualdades, sirviendo de minuendo la segunda, y despejando a *sen* $\frac{1}{2} a$, tenemos:

$$\text{sen } \tfrac{1}{2} a = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos a}{2}}$$

Sumando las mismas dos igualdades, y despejando a *cos* $\frac{1}{2}$ *a*, tenemos:

$$\cos \tfrac{1}{2} a = \pm \sqrt{\frac{1+\cos a}{2}}$$

Dividiendo las dos últimas resulta:

$$\text{tang} \tfrac{1}{2} a = \pm \sqrt{\frac{1-\cos a}{2+\cos a}}$$

20. TRASFORMAR EN PRODUCTOS LA SUMA Y LA DIFERENCIA DE SENOS Y DE COSENOS – Para la aplicación de las fórmulas, es necesario hacerlas calculables por logaritmos; y en preciso, en consecuencia, convertir las sumas y diferencias que las fórmulas encierran en operaciones que ad mitan el cálculo logarítmico. Vamos a tratar de las trasformaciones que ocurren más a menudo.

Pongamos primeramente las fórmulas siguientes:

$$\text{sen}\,(a+b) = \text{sen}\,a \cos b + \text{sen}\,b \cos a$$
$$\text{sen}\,(a-b) = \text{sen}\,a \cos b - \text{sen}\,b \cos a$$
$$\cos\,(a+b) = \cos a \cos b - \text{sen}\,a\,\text{sen}\,b$$
$$\cos\,(a-b) = \cos a \cos b + \text{sen}\,a\,\text{sen}\,b$$

Sumemos la primera con la segunda; quitemos la segunda de la primera; sumemos la tercera con la cuarta; y restemos la tercera de la cuarta. Tendremos:

$$\text{sen}\,(a+b) + \text{sen}\,(a-b) = 2\,\text{sen}\,a \cos b$$
$$\text{sen}\,(a+b) - \text{sen}\,(a-b) = 2 \cos a\,\text{sen}\,b$$
$$\cos\,(a+b) + \cos\,(a-b) = 2 \cos a \cos b$$
$$\cos\,(a-b) - \cos\,(a+b) = 2\,\text{sen}\,a\,\text{sen}\,b$$

Si hacemos $(a+b)=p$ y $a-b=q$, tenemos:

$$\begin{array}{r} a+b=p \\ a-b=q \\ \hline 2a=p+q \end{array}$$

De donde

$$a = \tfrac{1}{2}\,(p+q)$$

Restando queda:

$$b = \tfrac{1}{2}\,(p-q)$$

Sustituyendo, obtenemos:

$$\text{sen}\,p + \text{sen}\,q = 2\,\text{sen}\,\tfrac{1}{2}\,(p+q) \cos \tfrac{1}{2}\,(p-q)$$
$$\text{sen}\,p - \text{sen}\,q = 2 \cos \tfrac{1}{2}\,(p+q)\,\text{sen}\,\tfrac{1}{2}\,(p-q)$$
$$\cos q + \cos p = 2 \cos \tfrac{1}{2}\,(p+q) \cos \tfrac{1}{2}\,(p-q)$$
$$\cos q - \cos p = 2\,\text{sen}\,\tfrac{1}{2}\,(p+q)\,\text{sen}\,\tfrac{1}{2}\,(p-q)$$

LECCION TERCERA

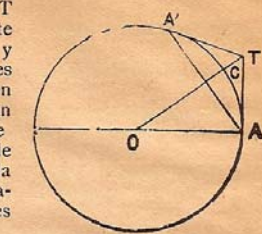
Tablas trigonométricas

21. TEOREMA — *Un arco muy pequeño difiere muy poco de su seno.*

Sea AC (fig. 16) un arco muy pequeño que llamaremos a.

Llevemos la cuerda AA′ perpendicular al radio OC, y tracemos las tangentes AT y A′T.

La línea AT es la tangente del arco a, y esa línea es igual a A′T, en virtud de un principio de Geometría; de modo que la línea quebrada A′TA es igual a 2 *tang* a.



Fg. 16

Ahora, el arco ACA′ es igual a $2a$, y la cuerda AA′ es igual a 2 *sen.* a.

Pongamos la siguiente desigualdad evidente:

$$\text{cuerda AA}' < \text{arco ACA}' < \text{ATA}'$$

o sea:

$$2\,\text{sen}\,a < 2a < 2\,\text{tang}\,a$$

de donde:

$$\text{sen}\,a < a < \text{tang}\,a$$

Tomando los inversos, se tiene:

$$\frac{1}{\text{sen}\,a} > \frac{1}{a} > \frac{1}{\text{tang}\,a}$$

Multiplicando por *sen* a, resulta:

$$1 > \frac{\text{sen}\,a}{a} > \frac{\text{sen}\,a}{\text{tang}\,a}$$

o sea:

$$1 > \frac{\text{sen}\,a}{a} > \cos a$$

Según esta desigualdad, la relación del seno al arco está comprendida entre la unidad y el coseno; y como la unidad y el coseno de un arco difieren entre sí muy poco cuando el arco es muy pequeño, resulta que la relación del seno al arco es casi igual a la unidad cuando el arco es muy pequeño; o lo que es lo mismo, el seno de un arco muy pequeño es casi igual al arco.

22. TEOREMA—*El error que se comete tomando un arco del primer cuadrante por su seno, es menor que la cuarta parte del cubo del arco.*

Tenemos evidentemente:

$$\text{tang}\ \tfrac{1}{2} a > \tfrac{1}{2} a$$

o sea:

$$\frac{\text{sen}\ \frac{1}{2} a}{\cos \frac{1}{2} a} > \tfrac{1}{2} a$$

Multiplicando esta desigualdad por 2 *cos*^{2} $\frac{1}{2}$ *a*, resulta:

$$2\ \text{sen}\ \tfrac{1}{2} a \cos \tfrac{1}{2} a > a \cos^2 \tfrac{1}{2} a$$

En virtud de la nota del artículo 18, el primer miembro es igual a *sen. a;* y por consiguiente:

$$\text{sen}\ a > a \cos^2 \tfrac{1}{2} a$$

Pero como *cos*^{2} $\frac{1}{2}$ *a* es igual a *1—sen*^{2} $\frac{1}{2}$ *a*, en virtud de la primera fórmula fundamental, se tiene:

$$\text{sen}\ a > a\,(1 - \text{sen}^2\ \tfrac{1}{2} a)$$

Si ponemos en el segundo miembro en lugar de *sen.* $\frac{1}{2}$ *a* el arco $\frac{1}{2}$ *a*, ponemos una cantidad mayor en el sustraendo, y la desigualdad existiría con mayor razón. Tendremos:

$$\text{sen}\ a > a\left(1 - \frac{a^2}{4}\right)$$

o sea:

$$\text{sen}\ a > a - \frac{a^3}{4}$$

de donde:

$$a - \text{sen}\ a < \frac{a^3}{4}$$

que era lo que queríamos demostrar.

23. TEOREMA—*El error que se comete tomando la expresión* $\left(1 - \frac{a^2}{2}\right)$ *por valor de* cos *a es menor que* $\frac{a^2}{16}$.

Elevando al cuadrado la fórmula de *sen.* $\frac{1}{2}$ *a*, encontrada en el artículo 19, y despejando a *cos. a*, tenemos:

$$\cos a = 1 - 2\ \text{sen}^2\ \tfrac{1}{2} a \qquad (1)$$

Si ponemos en el segundo miembro en lugar de *sen.* $\frac{1}{2}$ *a* el arco $\frac{1}{2}$ *a*, ponemos una cantidad mayor en el sustraendo, y la igualdad se convertirá en desigualdad. Tendremos:

$$\cos a > 1 - \frac{a^2}{2} \qquad (2$$

Siendo así que la diferencia entre el seno y el arco es menor que la cuarta parte del cubo del arco, claro es que el seno de un arco está comprendido entre el arco y la diferencia entre el arco y la cuarta parte de su cubo; de suerte que:

$$a > \text{sen}\ a > a - \frac{a^3}{4}$$

Si en la segunda parte de la desigualdad ponemos $\frac{1}{2}a$ en lugar de *a*, nos queda:

$$\text{sen}\ \tfrac{1}{2} a > \frac{a}{2} - \frac{a^3}{32}$$

Si en el segundo miembro de la igualdad (1) ponemos en lugar de *sen* $\frac{1}{2}$ *a*, la cantidad menor $\left(\frac{a}{2} - \frac{a^3}{32}\right)$, obtenemos la desigualdad

$$\cos a < 1 - 2\left(\frac{a}{2} - \frac{a^3}{32}\right)^2$$

o sea:

$$\cos a < 1 - \frac{a^2}{2} + \frac{a^4}{16} - \frac{a^6}{512}$$

Si esta desigualdad es verdadera, con mayor razon lo será la siguiente:

$$\cos a < 1 - \frac{a^2}{2} + \frac{a^4}{16} \qquad (3)$$

Las desigualdades (2) y (3) demuestran que *cos a* está comprendido entre $\left(1 - \frac{a^2}{2}\right)$ y $\left(1 - \frac{a^2}{2} + \frac{a^4}{16}\right)$; y como la diferencia entre estas dos expresiones es $\frac{a^4}{16}$, se deduce que el error que se comete tomando a $\left(1-\frac{a^2}{2}\right)$ por valor de *cos a* es menor que $\frac{a^4}{16}$; que era lo que íbamos a demostrar.

24. CONSTRUCCIÓN DE LAS TABLAS TRIGONOMÉTRICAS— En la resolución de triángulos es necesario algunas veces conocer las líneas trigonométricas que corresponden a un arco dado; y ocurre otras veces conocer el arco correspondiente a una línea trigonométrica dada. Con este fin, se han construído tablas que contienen los valores de las líneas trigonométricas correspondientes a cierto número de arcos suficientemente próximos.

Para construír las tablas basta calcular las líneas trigonométricas en el primer cuadrante, puesto que en este cuadrante tienen todos los valores absolutos que son susceptibles de tomar. Por otra parte, basta calcular estos valores para arcos menores de 45°, porque ya se sabe que de las líneas trigonométricas de un arco se deducen las de su complemento. Y por último, es suficiente conocer una línea trigonométrica para averiguar el valor de las demás, por medio de las fórmulas que hemos estudiado.

Vamos, pues, a calcular los elementos de unas tablas trigonométricas, aplicando los conocimientos que hemos adquirido. Queremos, por ejemplo, construír unas tablas que contengan las líneas trigonométricas de arcos de diez en diez segundos.

Comencemos por calcular el seno de 10″. Recordemos que hemos convenido en que π sea la longitud de una semicircunferencia, y pongamos la siguiente proporción:

$$180^\circ : 3{,}1415926 = 10'' : x$$

o sea:

$$648000'' : 3{,}1415926 = 10'' : x$$

De donde:

$$x = 0{,}0000484813681$$

De modo que el arco 10″ es menor que 0,00005. Si tomamos este número como valor del seno de 10″, cometemos un error menor que $\frac{(0{,}00005)^3}{4}$ (artículo 22); error que no alcanza sino a la décimatercera decimal. De suerte que el valor del seno de 10″, con trece cifras decimales, es el siguiente:

$$\text{sen } 10'' = 0{,}0000484813681$$

Calculemos ahora el coseno de 10″. Si tomamos por valor de este coseno el número $1-\frac{(\text{arco } 10'')^2}{2}$, cometemos un error menor que $\frac{(0{,}00005')^4}{16}$ (artículo 23); error que no alcanza sino a la décimaoctava decimal. De suerte que el valor del coseno de 10″, con trece cifras decimales, es el siguiente:

$$\cos 10'' = 1-\frac{(0{,}00005)^2}{2} = 0{,}9999999988248$$

Conocidos ya el seno y el coceno de 10″, podríamos calcular los senos y cosenos de los arcos de 10″ en 10″, por medio de las fórmulas de *sen 2a* y *cos 2a;* pero el cálculo es más sencillo haciendo uso de las fórmulas de Simpson.

Escribamos las igualdades

$$\text{sen }(a+b)+\text{sen }(a-b)=2 \text{ sen } a \cos b$$
$$\cos (a+b)+\cos (a-b)=2 \cos a \cos b$$

Despejando en la primera a *sen* $(a+b)$, y en la segunda a *cos* $(a+b)$, tenemos:

$$\text{sen }(a+b)= 2 \text{ sen } a \cos b-\text{sen }(a-b)$$
$$\cos (a+b)= 2 \cos a \cos b-\cos (a-b)$$

Y haciendo $a=nb$, queda:

$$\text{sen }(nb+b)=2 \text{ sen } nb \cos b-\text{sen }(nb-b)$$
$$\cos (nb+b)=2 \cos nb \cos b-\cos (nb-b)$$

Supongamos que b es igual a 10″, y demos a n los valores sucesivos 1, 2, 3, 4, etc. Tendremos:

Para $n=1$:

$$\text{sen } 20''=2 \text{ sen } 10'' \cos 10''$$
$$\text{sen } 20''=2 \cos 10'' \cos 10''-1$$

Para $n=2$:

$$\text{sen } 30''=2 \text{ sen } 20'' \cos 10''-\text{sen } 10''$$
$$\cos 30''=2 \cos 20'' \cos 10''-\cos 10''$$

Para $n=3$:

$$\text{sen } 40''=2 \text{ sen } 30'' \cos 10''-\text{sen } 20''$$
$$\cos 40''=2 \cos 30'' \cos 10''-\cos 20''$$

Y así sucesivamente.

NOTA 1.ª—Una vez conocidos los valores del seno y del coseno, se encuentran los de las demás líneas por medio de las fórmulas fundamentales.

NOTA 2.ª—Los valores encontrados de la manera que dejamos explicada son los valores numéricos o *naturales* de las líneas trigonométricas. Tomando los logaritmos de esos números, se forman las tablas.

NOTA 3.ª—Este procedimiento de calcular tablas es apenas aproximado, y puede dar lugar a errores de significación, puesto que, como los valores de *sen.* 10" y *cos.* 10" son aproximados, los errores se van acumulando, y pueden llegar a ser considerables. Esto se evita calculando directamente uno que otro seno y uno que otro coseno, y comparando los resultados. Pero como el asunto de hacer las tablas no constituye por sí mismo un urgente aprendizaje, prescindimos de más detalles en este particular, y entramos al punto principal, que es aprender a conocer y manejar dichas tablas.

25. DISPOSICIÓN DE LAS TABLAS—Las tablas más generalmente conocidas entre nosotros son las de Callet y las de Lalande. Las primeras se llaman *grandes tablas*, y las segundas *pequeñas tablas*. Nosotros trataremos únicamente de las primeras.

Las tablas de Callet constan de dos partes. La primera parte contiene los logaritmos de los senos y tangentes de los cinco primeros grados, de segundo en segundo; y la segunda parte contiene los logaritmos de los senos, cosenos, tangentes y cotangentes desde 0° hasta 90°, de diez en diez segundos.

Vamos a explicar solamente la disposición de la segunda parte, porque después de conocida ésta basta observar la primera para comprender inmediatamente cómo debe manejársele.

Los grados desde 0° hasta 45° están marcados en la parte superior de las páginas; y en la parte inferior, en sentido contrario, están marcados los grados desde 45° hasta 90°.

Cada página tiene diez columnas. La primera columna de la izquierda contiene, de uno en uno, los minutos correspondientes a los grados de la página; la segunda contiene, de diez en diez, los sesenta segundos de cada minuto; la tercera contiene los logaritmos de los senos; la cuarta contiene las diferencias entre dichos logaritmos *(diferencias tabulares)*; la quinta contiene los logaritmos de los cosenos; la sexta contiene los logaritmos de las tangentes; la séptima contiene las diferencias tabulares; la octava contiene los logaritmos de los cotangentes; la novena es la misma segunda en orden inverso; y la décima es semejante a la primera.

La columna que está marcada arriba con el nombre de una línea trigonométrica, está marcada abajo con el nombre de la línea complementaria. *

Cuando tenga que buscarse un ángulo menor de 45°, y que conste de grados, minutos y segundos, se buscan los grados en la parte superior de las tablas; los minutos se buscan, de arriba para abajo, en la primera columna; y los segundos se buscan en la segunda columna, teniendo en cuenta que en esta columna no están sino 0", 10", 20", 30", 40" y 50"; de modo que cuando se tenga un ángulo con un número de segundos menor que 10, se busca el 0; si los segundos son más de 10, y menos de 20, se busca el 10; si son más de 20, y menos de 30, se busca el 20, etc.

En el artículo siguiente veremos lo que se hace con el excedente.

Cuando tenga que buscarse un ángulo mayor de 45°, y que conste de grados, minutos y segundos, se buscan los grados en la parte inferior de las tablas; los minutos se buscan, de abajo para arriba, en la décima columna; y los segundos se buscan en la novena, teniendo en cuenta lo mismo que hemos advertido al hablar de la segunda columna.

Nos resta solamente indicar que, con el fin de evitar las características negativas, figuran en las tablas aumentados en diez unidades los logaritmos de los senos, cosenos y tangentes desde 0° hasta 45°, lo mismo que los logaritmos de las cotangentes desde 45° hasta 90°. De modo que si uno de esos logaritmos tiene, por ejemplo, 9 de caracterísca, debe entenderse que su característica es $\bar{1}$.

26. USO DE LAS TABLAS—Ante todo sentamos el siguiente principio:

Cuando un arco x *aumenta,* log. sen. x *y* log. tang. x *aumentan; pero* log. cos. x *y* log. cot. x *disminuyen; y estos aumentos o*

* Es en sumo grado importante que el maestro haga que los alumnos pinten en el tablero una página de las tablas, con el objeto de que se fijen bien en la disposición de ellas.

diminuciones son sensiblemente proporcionales a los crecimientos del arco x, *cuando estos crecimientos son muy pequeños.*

Ahora bien, son dos los problemas que vamos a resolver con las tablas.

PRIMER PROBLEMA— *Dado un ángulo, encontrar el logaritmo de una de sus líneas trigonométricas.*

Propongámonos encontrar el logaritmo de

$$\text{sen } 38^\circ\, 45'\, 27'', 3$$

Comenzamos por buscar el ángulo de 38°. Una vez encontrado, buscamos en la primera columna de la izquierda, el número de minutos, y luégo vemos en la segunda columna el número redondo de segundos, que en este caso es 20. Haciendo esto, encontramos en la columna de los senos el siguiente logaritmo:

$$1{,}\ 7965737$$

Buscamos ahora en la columna siguiente la diferencia tabular, que es 262, y ponemos esta proporción:

$$10'' : 262 = 7'', 3 : x$$

que se traduce así:
si a 10″ *de aumento en el ángulo corresponde un aumento de* 262 *en el logaritmo, a* 7″, 3 *de aumento en el ángulo, cuánto corresponderá en el logaritmo?*

Resulta $x = 191$. Esto se agrega al logaritmo encontrado, y se tiene:

$$\log \text{sen } 38^\circ 45' 27'', 3 = \bar{1}{,}\ 7965928$$

Propongámonos ahora encontrar el logaritmo de

$$\cos 32^\circ 26' 43''.4$$

Procedamos lo mismo que en ejemplo anterior, pero en lugar de agregar al logaritmo encontrado el resultado de la proporción, quitamos de ese logaritmo dicho resultado. Este es el curso de la operación:

$$\text{long } \cos 32^\circ 26' 40'' = \bar{1}{,}9262972$$

Proporción:

$$10'' : 134 = 3'', 4 : x$$

$$x = 46$$

Por consiguiente:

$$\log \cos 32^\circ 26' 43'', 4 = \bar{1}9262926$$

Para las tangentes se procede como para los senos, y para las cotangentes como para los cosenos.

SEGUNDO PROBLEMA—*Dado el logaritmo de una línea trigonométrica, encontrar el ángulo correspondiente.*

Sea por ejemplo:

$$\log \text{sen } z = \bar{1}{,}1034756$$

Buscamos en las tablas el logaritmo próximo menor que se encuentre en una columna marcada arriba con la palabra *seno*. Si dicho logaritmo se halla en una columna marcada arriba con la palabra *seno*, se lee el ángulo arriba, y en el otro caso se lee abajo. En nuestro ejemplo el logaritmo próximo menor es $\bar{1}{,}1033667$. A este logaritmo corresponde el ángulo $7^\circ 17' 20''$.

El logaritmo encontrado difiere del propuesto en 1089 unidades del último orden decimal, y la diferencia tabular es 1645.

Ponemos ahora la siguiente proporción:

$$1645 : 10'' = 1089 : x''$$

que se traduce así:
¿si a una diferencia de 1645 *en el logaritmo corresponde una diferencia de* 10″ *en el ángulo, a una diferencia de* 1089 *en el logaritmo, cuánto corresponderá en el ángulo?*

Resulta $x = 6'', 62$. Agregando este resultado al ángulo encontrado, se tiene:

$$z = 7^\circ 17' 26'' 62$$

Sea ahora

$$\log \cos z = \bar{1}{,}6453478$$

Buscamos en las tablas el logaritmo próximo meyor que se encuentre en una columna marcada arriba o abajo con la palabra *coseno*, y hallamos este: $\bar{1}{,}6453641$.

A este logaritmo corresponde el ángulo $63^\circ 46' 20''$.

Ponemos ahora la siguiente proporción:

$$427 : 10'' = 163 : x''$$

de donde:

$$x = 3'', 82$$

Agregando este resultado al ángulo encontrado, se tiene:

$$z = 63°46'23'',82$$

Para las tangentes se procede como para los senos, y para las cotangentes como para los cosenos.

Ejercítense ahora los alumnos en los ejemplos siguientes:

1.° log tang $64°18'37'',26$
Resultado: $0,3178142$
2.° log cos $28°32'42'',8$
Resultado: $\bar{1},9437122$
3.° log sen $z = \bar{1},6324593$
Resultado: $z = 25°24'15'',2$
4.° log cot $z = \bar{1},8734625$
Resultado: $z = 53°13'52'',6$

LECCION CUARTA

Propiedades de los triángulos rectilíneos

27. Teorema—*Uno de los catetos de un triángulo rectilíneo rectángulo es igual a la hipotenusa multiplicada por el seno del ángulo opuesto al cateto, o por el coseno del ángulo adyacente.*

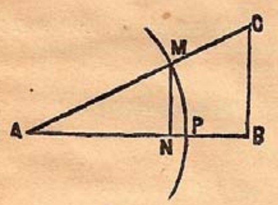


Fig. 17

Sea el triángulo rectilíneo ABC (fig. 17). Hagamos centro en el punto A, y con un radio igual o la unidad, tracemos un arco MP. Bajemos del punto M la perpendiular MN, que será el seno delángulo A.

Los dos triángulos semejantes AMN y ACB dan lugar a la siguente proporción:

$$AM : MN = AC : CB$$

o sea:

$$1 : \text{sen } A = AC : CB$$

de donde:

$$BC = AC \text{ sen } A$$

Y como los ángulos A y C son complementarios, se deduce:

$$BC = AC \cos C$$

28. Teorema—*Uno de los catetos de un triángulo rectilíneo rectángulo es igual al otro cateto multiplicado por la tangente del ángulo opuesto al primero, o por la contangente del ángulo adyacente.*

Sea el triángulo rectángulo ABC (fig. 18). Haciendo centro en el punto A, y con un radio igual a la unidad, trecemos el arco PN, y levantemos en el punto N la perpendicular MN, que será la tangente del ángulo en A.

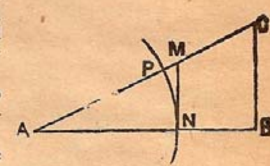


Fig. 18

Los dos triángulos semejantes AMN y ACB dan lugar a la siguiente proporción:

$$AN : MN = AB : BC$$

o sea:

$$1 : \text{tang } A = AB : BC$$

de donde:

$$BC = AB \text{ tang } A$$

Y como los ángulos A y C son complementarios, se deduce:

$$BC = AB \cot A$$

29. Teorema—*En todo triángulo rectilíneo, el cuadrado de un lado cualquiera es igual a la suma de los cuadrados de los otros dos lados, menos dos veces el producto de estos dos lados por el coseno del ángulo comprendido entre ellos.*

Sea el triángulo ABC (fig. 19), en que el ángulo A es agudo.

Llamemos a, b y c los lados de este triángulo, y A. B y C los ángulos opuetos respectivos.

En virtud de un teorema de Geometría tenemos:

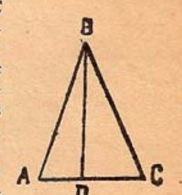


Fig. 19

$$CB^2 = AB^2 + AC^2 - 2 \times AC \times AD$$

Pero como sabemos que

$$AD = AB \cos. A$$

nos resulta:

$$CB^2 = AB^2 + AC^2 - 2 \times AC \times AB \cos A$$

es decir:

$$a^2 = c^2 + b^2 - 2bc \cos A$$

Si el ángulo A es obtuso (fig. 20); en virtud de un teorema de Geometría, tenemos:

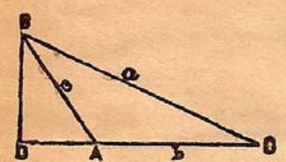


Fig. 20

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 + 2 \times AC \times AD$$

Y como también tenemos:

$$AD = AB \cos BAD$$

$$\cos BAD = -\cos BAC,$$

resulta:

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2 \times AC \times AB \cos BAC$$

es decir:

$$a^2 = c^2 + b^2 - 2bc \cos A$$

Por analogía podemos escribir las dos relaciones siguientes:

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos B$$
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$$

30. Teorema—*En un triángulo rectilíneo cualquiera, los lados son proporcionales a los senos de los ángulos opuestos.*

Sea el triángulo ABC (fig. 19). Trazando la perpendicular BD, se forman los dos triángulos rectángulos ABD y BDC.

En el primero tenemos:

$$BD = AB \text{ sen } A$$

En el segundo tenemos:

$$BD = BC \text{ sen } C$$

Por consiguiente:

$$AB \text{ sen } A = BC \text{ sen } C$$

de donde:

$$AB : BC = \text{sen } C : \text{sen } A$$

que era lo que queríamos demostrar.

Cuando el triángulo es obtusángulo, la perpendicular puede caer fuéra del triángulo, y en ese caso es también cierta la proposición. En efecto, sea el triángulo ABC (fig. 20), en el cual la perpendicular BD cae fuéra del triángulo.

En el triángulo rectángulo BDC tenemos:

$$BD = BC \text{ sen } C$$

En el triángulo rectángulo BDA tenemos:

$$BD = AB \text{ sen } BAD$$

Por consiguiente:

$$BC \text{ sen } C = AB \text{ sen } BAD$$

Pero como los ángulos BAC y BAD son suplementarios, tienen el mismo seno; y por tanto:

$$BC \text{ sen } C = AB \text{ sen } A$$

de donde:

$$AB : BC = \text{sen. } C : \text{sen } A$$

31. Expresión de los ángulos de un triángulo rectilíneo en función de los lados—Vamos a buscar unas fórmulas que representan los ángulos de un triángulo expresados en función de los lados:

Ya sabemos que

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A \qquad (1)$$

Y también sabemos que

$$\cos \tfrac{1}{2} A = \sqrt{\frac{1 + \cos A}{2}} \qquad (2)$$

Despejando a *cos. A* de la igualdad (1) se tiene:

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$$

Sustituyendo este valor en la igualdad (2), se tiene:

$$\cos \tfrac{1}{2} A = \sqrt{\frac{b^2 + 2bc + c^2 - a^2}{4bc}}$$

o sea:

$$\cos \tfrac{1}{2} A = \sqrt{\frac{(b+c)^2 - a^2}{4bc}}$$

o sea:

$$\cos \tfrac{1}{2} A = \sqrt{\frac{(b+c+a)\,(b+c-a)}{4bc}} \quad (3)$$

Ahora tenemos:

$$\text{sen } \tfrac{1}{2} A = \sqrt{\frac{1-\cos A}{2}}$$

Haciendo desarrollos iguales a los anteriores, llegamos a este resultado:

$$\text{sen } \tfrac{1}{2} A = \sqrt{\frac{(a+b-c)(a+c-b)}{4bc}} \quad (4)$$

Cualquiera de las dos expresiones (3) y (4) representa el ángulo A en función de los lados del triángulo; pero todavía podemos simplificar esas expresiones, y vamos a hacerlo.

Pongamos

$$a+b+c=2p$$

De aquí deducimos:

$$b+c-a=2\,(p-a)$$
$$a+c-b=2\,(p-b)$$
$$a+b-c=2\,(p-c)$$

Sustituyendo en (3) y en (4), obtenemos:

$$\cos \tfrac{1}{2} A = \sqrt{\frac{p(p-a)}{bc}}$$

$$\text{sen } \tfrac{1}{2} A = \sqrt{\frac{(p-b)\,(p-c)}{bc}}$$

Dividiendo la segunda por la primera, resulta:

$$\text{tang } \tfrac{1}{2} A = \sqrt{\frac{(p-b)\,(p-c)}{p\,(p-a)}}$$

Y por analogía podemos escribir:

$$\text{tang } \tfrac{1}{2} B = \sqrt{\frac{(p-a)\,(p-c)}{p\,(p-b)}}$$

$$\text{tang } \tfrac{1}{2} C = \sqrt{\frac{(p-a)\,(p-b)}{p\,(p-c)}}$$

32. **Diferentes expresiones del área de un triángulo rectilíneo**—Vamos a expresar de cuatro maneras el área de un triángulo rectilíneo.

1.ª *El área de un triángulo rectilíneo es igual a la mitad del producto de dos lados, multiplicado por el seno del ángulo comprendido.*

Sea el triángulo ABC (fig. 19). Bajemos del vértice B la perpendicular BD sobre la base.

Llamando T el área del triángulo tenemos:

$$T = \tfrac{1}{2}\, AC \times BD$$

Pero como

$$BD = AB \text{ sen } A$$

se tiene:

$$T = \tfrac{1}{2}\, bc \text{ sen } A$$

2.ª *El área de un triángulo rectilíneo es igual a la mitad del cuadrado de un lado, multiplicada por el producto de los senos de los ángulos adyacentes, y dividida por el seno de la suma de esos ángulos.*

Si en la expresión anterior ponemos en lugar de c el valor que resulta de la proporción

$$b : c = \text{sen } B : \text{sen } C$$

tenemos:

$$T = \tfrac{1}{2}\, b^2 \frac{\text{sen } A \text{ sen } C}{\text{sen } B}$$

o sea:

$$T = \tfrac{1}{2}\, b^2 \frac{\text{sen } A \text{ sen } C}{\text{sen } (A+C)}$$

3.ª *El ángulo de un triángulo rectilíneo es igual a la raíz cuadrada del producto que se obtiene multiplicando el semiperímetro por las diferencias entre el semiperímetro y cada uno de los lados.*

Por lo visto en la nota del artículo 18, tenemos:

$$\text{sen } A = 2 \text{ sen } \tfrac{1}{2} A \cos \tfrac{1}{2} A$$

Poniendo en esta expresión los valores de *sen* $\frac{1}{2}A$ y *cos* $\frac{1}{2}A$, obtenidos en el artículo 31, resulta:

$$\text{sen } A = \frac{2}{be}\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

Sustituyendo este valor en la primera de las expresiones de este artículo, tenemos:

$$T = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

4.ª *El área de un triánguto rectilíneo es igual al cuadrado del semiperímetro, multiplicado por las tangentes trigonométricas de las mitades de los ángulos.*

Según lo visto en el artículo 31, tenemos:

$$\text{tang } \tfrac{1}{2} A \times \text{tang } \tfrac{1}{2} B \times \text{tang } \tfrac{1}{2} C = \frac{1}{p^2}$$
$$\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}.$$

o séa:

$$\text{tang } \tfrac{1}{2} A \text{ tang } \tfrac{1}{2} B \text{ tang } \tfrac{1}{2} C = \frac{T}{p^2}$$

De donde:

$$T = p^2 \text{ tang } \tfrac{1}{2} A \text{ tang } \tfrac{1}{2} B \text{ tang } \tfrac{1}{2} C$$

33. FORMULARIO—Con el fin de fijar las ideas antes de entrar a la resolución de triángulos, vamos a consignar en este artículo todas las fórmulas que hemos deducido. En todo caso de duda, este formulario puede servir de consulta a los calculadores.

1. $\text{sen}^2 a + \cos^2 a = 1$
2. $\text{tang } a = \dfrac{\text{sen } a}{\cos a}$
3. $\cot a = \dfrac{\cos a}{\cos a}$
4. $\text{sen } a = \dfrac{1}{\cos a}$
5. $\text{cosec } a = \dfrac{1}{\text{sen } a}$
6. $\text{sen } a = \dfrac{\text{tang } a}{\pm\sqrt{1+\text{tang}^2 a}}$
7. $\cos a = \dfrac{1}{\pm\sqrt{1+\text{tang}^2 a}}$
8. $\text{sen}(a+b) = \text{sen } a \cos b + \text{sen } b \cos a$
9. $\cos(a+b) = \cos a \cos b - \text{sen } a \text{ sen } b$
10. $\text{sen}(a-b) = \text{sen } a \cos b - \text{sen } b \cos a$
11. $\cos(a-b) = \cos a \cos b + \text{sen } a \text{ sen } b$
12. $\text{tang}(a+b) = \dfrac{\text{tang } a + \text{tang } b}{1 - \text{tang } a \text{ tang } b}$
13. $\text{tang}(a-b) = \dfrac{\text{tang } a - \text{tang } b}{1 + \text{tang } a \text{ tang } b}$
14. $\text{sen } 2a = 2 \text{ sen } a \cos a$
15. $\cos 2a = \cos^2 a - \text{sen}^3 a$
16. $\text{tang. } 2a = \dfrac{2 \tan a}{1 - \text{tang}^2 a}$
17. $\text{sen } a = 2 \text{ sen } \dfrac{a}{2} \cos \dfrac{a}{2}$
18. $\cos a = \cos^2 \dfrac{a}{2} - \text{sen}^2 \dfrac{a}{2}$
19. $\text{tang } a = \dfrac{2 \text{ tang } \frac{a}{2}}{1 - \text{tang}^2 \frac{a}{2}}$
20. $\text{sen } \dfrac{a}{2} = \pm\sqrt{\dfrac{1-\cos a}{2}}$
21. $\cos \dfrac{a}{2} = \pm\sqrt{\dfrac{1+\cos a}{2}}$
22. $\text{tang } \dfrac{a}{2} = \pm\sqrt{\dfrac{1-\cos a}{1+\cos a}}$
23. $\text{sen } p + \text{sen } q = 2 \text{ sen } \dfrac{1}{2}(p+q) \cos \dfrac{1}{2}(p-q)$
24. $\text{sen } p - \text{sen } q = 2 \cos \tfrac{1}{2}(p+q) \text{ sen } \tfrac{1}{2}(p-q)$
25. $\cos p + \cos q = 2 \cos \tfrac{1}{2}(p+q) \cos \tfrac{1}{2}(p-q)$
26. $\cos q - \cos p = 2 \text{ sen } \tfrac{1}{2}(p+q) \cos \tfrac{1}{2}(p-q)$
27. $b = a \text{ sen } B.$
28. $b = a \cos C.$
29. $c = a \text{ sen } C.$
30. $c = a \cos B.$
31. $b = c \text{ tang } B.$
32. $b = c \cot C.$
33. $c = b \text{ tang } C.$
34. $c = b \cot B.$
35. $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A.$
36. $a : b = \text{sen } A : \text{sen } B.$
37. $a : c = \text{sen } A : \text{sen } C.$
38. $b : c = \text{sen } B : \text{sen } C.$

39. $\operatorname{tang} \frac{1}{2} A = \sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{p(p-a)}}$

40. $\operatorname{tang} \frac{1}{2} B = \sqrt{\frac{(p-a)(p-c)}{p(p-b)}}$

41. $\operatorname{tang} \frac{1}{2} C = \sqrt{\frac{(p-a)(p-b)}{p(p-c)}}$

42. $T = \frac{1}{2} bc \operatorname{sen} A.$

43. $T = \frac{1}{2} b^2 \frac{\operatorname{sen} A \operatorname{sen} C}{\operatorname{sen}(A+C)}$

44. $T = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$

45. $T = p^2 \operatorname{tang} \frac{1}{2} A \operatorname{tang} \frac{1}{2} B \operatorname{tang} \frac{1}{2} C.$

LECCION QUINTA

Resolución de triángulos rectilíneos

34. RESOLUCIÓN DE TRIÁNGULOS RECTÁNGULOS—Ya nosotros conocemos los casos que ocurren en la resolución de los triángulos rectángulos (artículo 2.º), y ya tenemos también los conocimientos necesarios para el objeto. Pero antes de entrar en materia, y con el fin de abreviar los desarrollos, convengamos en hacer, siempre que se trate de un triángulo, lo que hemos hecho en alguno de los artículos anteriores, es decir, designar los ángulos de todo triángulo rectilíneo por *A*, *B* y *C*, y los lados opuestos respectivos por *a*, *b* y *c*; y convengamos también en que cuando se trate de un triángulo rectángulo llamemos *A* al ángulo recto, y *a* la hipotenusa.

Vamos, pues, a resolver los cuatro casos:

CASO PRIMERO. * *Datos: a* y *B*.

El triángulo es siempre posible.

Fórmulas de resolución: para *b* la 27 del artículo 33; para *c* la 30, y para C esta:

$$C = 90^\circ - B$$

El área sale de la relación: $T = \frac{1}{2} bc = \frac{1}{2} a^2 \operatorname{sen} B \cos B.$

CASO SEGUNDO. *Datos; b* y *B*.

El triángulo es siempre posible.

Fórmulas de resolución: para *c* la fórmula 31; para *a* la 27; y para *C* esta:

$$C = 90^\circ - B$$

* **Para facilitar la resolución de un triángulo en cualquier caso, conviene pintarlo, a fin de tener a la vista los datos y las incógnitas.**

El área sale de la relación: $T = \frac{1}{2} bc = \frac{1}{2} b^2 \cot. B.$

CASO TERCERO. *Datos: a* y *b*.

Para que el triángulo sea posible, es necesario que la hipotenusa *a* sea mayor que el cateto *b*.

Fórmulas de resolución: para *B* la fórmula 27; para *C* la 28, o esta: $C = 90^\circ - B$; y para *c* esta: $c = \sqrt{a^2 - b^2}$, o la 29.

El área sale de la relación: $T = \frac{1}{2} ab \operatorname{sen} C.$

CASO CUARTO. *Datos: b* y *c*.

El triángulo es siempre posible.

Fórmulas de resolución: para *B* la 31; para *C* la 32, o esta: $C = 90^\circ - B$; y para *a* la 27, o esta: $a = \sqrt{b^2 + c^2}$.

El área sale de la fórmula: $T = \frac{1}{2} bc.$

35. RESOLUCIÓN DE TRIÁNGULOS CUALESQUIERA—Como hemos visto (artículo 2), ocurren también cuatro casos.

CASO PRIMERO. *Datos: A*, *B* y *c*.

Para que el triángulo sea posible, es necesario que la suma de los dos ángulos dados no alcance a valer 180º.

Fórmulas de resolución: para *C* esta: $C = 180^\circ - (A+B)$; para *a* la 37, y para *b* la 38.

El área sale de la relación: $T = \frac{1}{2} c^2 \frac{\operatorname{sen} A \operatorname{sen} B}{\operatorname{sen} C}.$

CASO SEGUNDO. *Datos: a*, *b* y *C*.

El triángulo es siempre posible.

Para calcular los ángulos *A* y *B*, comenzamos por averiguar el valor de su suma, así:

$$A + B = 180^\circ - C$$

Ahora, de la proporción

$$a : b = \operatorname{sen} A : \operatorname{sen} B$$

sacamos:

$$a - b : a + b = \operatorname{sen} A - \operatorname{sen} B : \operatorname{sen} A + \operatorname{sen} B$$

o sea:

$$\frac{a-b}{a+b} = \frac{\operatorname{sen} A - \operatorname{sen} B}{\operatorname{sen} A + \operatorname{sen} B}$$

o sea:

$$\frac{a-b}{a+b} = \frac{2 \cos \frac{1}{2}(A+B) \operatorname{sen} \frac{1}{2}(A-B)}{2 \operatorname{sen} \frac{1}{2}(A+B) \cos \frac{1}{2}(A-B)}$$

o sea:

$$\frac{a-b}{a+b}=\frac{\text{tang } \frac{1}{2}\,(A-B)}{\text{tang } \frac{1}{2}\,(A+B)}$$

de donde:

$$\text{tang } \tfrac{1}{2}\,(A-B)=\frac{(a-b)\ \text{tang } \frac{1}{2}\,(A+B)}{a+b}$$

De este modo conocemos la diferencia $A-B$, y como ya conocemos la suma $A+B$, podemos calcular los ángulos A y B.
El lado c se calcula por la fórmula 38.
El área sale de la relación: $T = \frac{1}{2}\, ab$ sen C.

Caso tercero. *Datos: a, b y A.*
Fórmulas de resolución: para el ángulo B la fórmula 36; para el ángulo C esta: $C = 180^\circ - (A+B)$, y para el lado c la fórmula 37.
Discusión—Tomemos la igualdad que da el valor del ángulo B, deducida de la fórmula 36, es decir:

$$\text{sen. } B = \frac{b \text{ sen } A}{a}$$

y consideremos las tres hipótesis principales que pueden hacerse sobre los valores del dividendo y del divisor.
1.ª b sen $A > a$. De aquí resulta: sen. $B > 1$. Por consiguiente, el ángulo B no existe. *El problema es imposible.*
2.ª b sen $A = a$. De aquí resulta: sen $B = 1$. Por consiguiente, el ángulo B es recto. *Para que esto sea posible, el ángulo A, debe ser agudo.*
3.ª b sen $A < a$. De aquí resulta: sen $B < 1$. A ese valor corresponden dos ángulos suplementarios. Veamos cuál de ellos satisface.
Llamemos δ el ángulo agudo que se encuentre en las tablas, y que satisfaga la relación

$$\text{sen } \delta = \frac{b \text{ sen } A}{a}$$

Y hagamos tres suposiciones:
1.ª $a > b$. De aquí resulta: $A > B$, y en este caso el ángulo B debe ser agudo, es decir, $B = \delta$. *El problema tiene una sola solución.*
2.ª $a = b$. De aquí resulta: $A = B$, y en este caso los dos ángulos A y B tienen que ser agudos. *El problema tiene una solución.*
3.ª $a < b$. De aquí resulta: $A < B$. *Si el ángulo A es agudo, el problema tiene dos soluciones:* una para $B = \delta$, y otra para $B = 180^\circ - \delta$; pero si el ángulo A es obtuso, *el triángulo es imposible*, porque B es mayor que A.

La anterior discusión se resume en el cuadro siguiente:

$$b \text{ sen } A > a \quad \textit{No hay solución}$$

$$b \text{ sen } A = a \begin{cases} A > 90^\circ & \textit{No hay solución.} \\ A = 90^\circ & \textit{No hay solución.} \\ A < 90^\circ & \textit{Hay una solución.} \end{cases}$$

$$b \text{ sen } A < a \begin{cases} a > b & \qquad \textit{Hay una solución.} \\ a = b & \begin{cases} A > 90^\circ & \textit{No hay solución.} \\ A = 90^\circ & \textit{No hay solución.} \\ A < 90^\circ & \textit{Hay una solución.} \end{cases} \\ a < b & \begin{cases} A > 90^\circ & \textit{No hay solución.} \\ A = 90^\circ & \textit{No puede suponerse.} \\ A < 90^\circ & \textit{Hay dos soluciones.} \end{cases} \end{cases}$$

Caso cuarto. *Datos: a, b y c.*
Para que el triángulo sea posible, es necesario y basta que el lado mayor sea menor que la suma de los otros dos.
Fórmulas de resolución: para A la 39; para B, la 40; y para C la 41.
El área sale de la relación:

$$T = \sqrt{p\,(p-a)\,(p-b)\,(-c)}$$

LECCION SEXTA

Ejercicios de Trigonometría rectilínea

36. Problema I — *Encontrar directamente el seno y el coseno de 45°, 30° y 60°.*
Resolución. El seno de 45° es igual a la mitad del lado del cuadrado inserto; de modo que:

$$\text{sen } 45^\circ = \tfrac{1}{2}\sqrt{2}$$

Como el coseno de 45° es igual al seno de 45°, se tiene también:

$$\cos 45 = \tfrac{1}{2}\sqrt{2}$$

El seno de 30° es la mitad de la cuerda de 60°, es decir, la mitad del radio; por consiguiente:

$$\text{sen } 30^\circ = \tfrac{1}{2}$$

De esto resulta:

$$\cos 30^\circ = \sqrt{1-\tfrac{1}{4}} = \tfrac{1}{2}\sqrt{3}$$

Como los ángulos de 60° y de 30° son complementarios, se tiene:

$$\operatorname{sen} 60^\circ = \tfrac{1}{2}\sqrt{3}$$
$$\cos 60^\circ = \tfrac{1}{2}$$

37. Problema II—*Calcular la expresión*

$$\frac{\operatorname{sen} 60^\circ - \operatorname{sen} 30^\circ}{\operatorname{sen} 60^\circ + \operatorname{sen} 30^\circ}$$

Resolución. Sabiendo que *sen* $60^\circ = \tfrac{1}{2}\sqrt{3}$ y que *sen* $30^\circ = \tfrac{1}{2}$, se tiene:

$$\frac{\operatorname{sen} 60^\circ - \operatorname{sen} 30^\circ}{\operatorname{sen} 60^\circ + \operatorname{sen} 30^\circ} = \frac{\tfrac{1}{2}\sqrt{3} - \tfrac{1}{2}}{\tfrac{1}{2}\sqrt{3} + \tfrac{1}{2}} = \frac{\sqrt{3} - 1}{\sqrt{3} + 1}$$

Multiplicando los dos términos del quebrado por $\sqrt{3} - 1$, nos queda:

$$\frac{\operatorname{sen} 60^\circ - \operatorname{sen} 30^\circ}{\operatorname{sen} 60^\circ + \operatorname{sen} 30^\circ} = 2 - \sqrt{3}$$

38. Problema III. *Encontrar el ángulo cuya tangente es* $\sqrt{2} - 1$.

Resolución. Sea O (fig. 21) el centro del círculo. Formemos el cuadrado $OABC$, cuya diagonal AC vale $\sqrt{2}$. Haciendo centro en A, con AC por radio, describamos un arco que corte en D a la prolongación de AB. Tendremos;

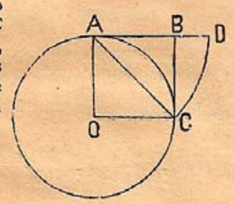


Fig. 21

$$BD = AD - AB = AC - OC = \sqrt{2} - 1$$

Luego el ángulo BCD (imaginando trazada la recta CD) es el que tiene por tangente a $\sqrt{2} - 1$.

Para calcularlo en grados, tenemos:

$$DAC = 45^\circ$$
$$ADC = ACD$$
$$ADC + ACD = 135^\circ$$
$$ADC = 67^\circ,5$$
$$ACB = 45^\circ$$
$$BCD = 67^\circ,5 - 45^\circ = 22^\circ,5$$
$$BCD = \tfrac{1}{8}\,\pi.$$

39. Problema IV. *Demostrar que*

$$\operatorname{sen} a = \frac{2 \operatorname{tang} \frac{1}{2} a}{1 + \operatorname{tang}^2 \frac{1}{2} a}$$

Resolución. Se tiene:

$$\frac{2 \operatorname{tang} \frac{1}{2} a}{1 + \operatorname{tang}^2 \frac{1}{2} a} = \frac{2\dfrac{\operatorname{sen} \frac{1}{2} a}{\cos \frac{1}{2} a}}{1 + \dfrac{\operatorname{sen}^2 \frac{1}{2} a}{\cos^2 \frac{1}{2} a}} = \frac{2\dfrac{\operatorname{sen} \frac{1}{2} a}{\cos \frac{1}{2} a}}{\dfrac{\cos^2 \frac{1}{2} a + \operatorname{sen}^2 \frac{1}{2} a}{\cos^2 \frac{1}{2} a}} =$$

$$2 \operatorname{sen} \tfrac{1}{2} a \cos \tfrac{1}{2} a = \operatorname{sen} a$$

40. Problema V—*Encontrar la superficie de un trapecio en función de sus cuatro lados.*

Resolución. Sea el trapecio $N\,M\,P\,Q$ (fig. 22). Llamemos B la base $P\,Q$, y b la base $M\,N$; a el lado $M\,P$, y c el lado $N\,Q$.

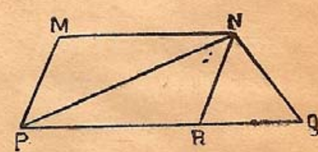


Fig. 22

Por el punto N tracemos una paralela $N\,R$ a $M\,P$, y juntemos los puntos N y P.

Los dos triángulos $N\,R\,Q$ y $P\,N\,R$, que tienen la misma altura, dan la proporción:

$$NRQ : PNR = RQ : PR$$

o sea:

$$NRQ : PNR = B - b : b$$

Duplicando los consecuentes, y comparando componiendo, se tiene:

$$NRQ + 2PNR : NRQ = B - b + 2b : B - b$$

De donde:

$$MNPQ = \frac{B+b}{B-b} \times NRQ$$

Expresando ahora el triángulo NQR en función de sus lados, se tiene:

$$\text{MNPQ}=\frac{\text{B}+b}{\text{B}-b}\sqrt{p(p-a)(p-c)(p-\text{B}+b)}$$

y esta es el área pedida.

41. Problema VI—*Conociendo los lados de un cuadrilátero inscrito, determinar los ángulos.*

Resolución. Sea un cuadrilátero inscrito $ABCD$ (fig. 23), cuyos lados a, b, c y d se conocen. Trazando la diagonal BD, tenemos:

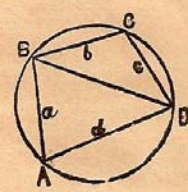


Fig. 23

$$BD^2 = a^2 + d^2 - 2a\,d \cos A$$

$$BD^2 = b^2 + c^2 - 2b\,c \cos C$$

Por esto, y por ser $\cos$ C$=-\cos$ A se tiene:

$$a^2 + d^2 - 2a\,d \cos A = b^2 + c^2 + 2bc \cos A$$

de donde:

$$\cos \text{A} = \frac{a^2 + d^2 - b^2 - c^2}{2\,a\,d + 2\,bc}$$

Así queda conocido el ángulo A. Conocido éste, se conoce el ángulo C; y trazando la diagonal CA podemos determinar de un modo análogo los ángulos B y D.

Las fórmulas que resultan pueden hacerse calculables por logaritmos, poniendo $a+b+c+d=2p$.

42. Problema VII—*Buscar la relación que existe entre dos lados de un triángulo rectilíneo cualquiera con los ángulos que forman esos lados con la mediana que parte del vértice del ángulo comprendido por dichos lados.*

Resolución—Sea ABC un triángulo (fig. 24), y BD una mediana. Sean m y n los ángulos que la mediana forma con los lados c y a.

En el triángulo ABD se tiene:

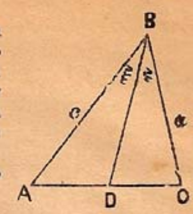


Fig 24.

$$\text{AD} : \text{BD} = \text{sen } m : \text{sen A}$$

En el triángulo BCD se tiene:

$$\text{CD} : \text{BD} = \text{sen } n : \text{C}$$

De estas dos proporciones resulta:

$$\text{sen } m : \text{sen A} = \text{sen } n : \text{sen C}$$

Pero en el triángulo total tenemos:

$$\text{sen A} : a = \text{sen C} : c$$

De las dos últimas proporciones se deduce:

$$\text{sen } m : \text{sen } n = a : c$$

Esta es la relación que se pide:

43. Problema VIII—*Encontrar el seno y el coseno del arco de 75°.*

Resolución. Se dice:

$$\text{sen } 75° = \text{sen } (45°+30°) = \tfrac{1}{2}\sqrt{2} \times \tfrac{1}{2}\sqrt{3} + \tfrac{1}{2} \times \tfrac{1}{2}\sqrt{2}$$

$$\cos 75° = \cos (45°+30) = \tfrac{1}{2}\sqrt{2} \times \tfrac{1}{2}\sqrt{3} - \tfrac{1}{2}\sqrt{2} \times \tfrac{1}{2}$$

44. Problema IX—*Calcular el ángulo* x *en la relación*

$$\text{tang } x = \text{tang A} + \text{tang B}$$

sabiendo que

A$=38° \, 24' \, 30''$, y que B$=49° \, 19' \, 40''$

Resolución. Tenemos:

$$\text{tang A} + \text{tang B} = \frac{\text{sen A}}{\cos \text{A}} + \frac{\text{sen B}}{\cos \text{B}}$$

de donde:

$$\text{tang A}+\text{tang B}=\frac{\text{sen (A+B)}}{\text{cos A cos B}}$$

Por consiguiente:

$$\log\ \text{tang}\ x=\log\ \text{sen (A+B)}-\log\ \text{cos A}-\log\ \text{cos B}$$

Reemplazando valores, resulta:

$$\log\ \text{tang}\ x=0{,}2914966$$

de donde:

$$x=62°55'42'',8$$

45. PROBLEMA X—*Resolver un triángulo rectilíneo, conociendo un lado, el ángulo opuesto, y la suma o la diferencia de los otros dos lados.*

RESOLUCIÓN. Supongamos que los datos son a, A y $b+c$. Pongamos las proporciones conocidas:

$$a : \text{sen A}=b : \text{sen B}=c : \text{sen C}$$

de donde:

$$\frac{b+c}{a}=\frac{\text{sen B}+\text{sen C}}{\text{sen A}}$$

o sea:

$$\frac{b+c}{a}=\frac{2\ \text{sen}\ \frac{1}{2}\ (\text{B+C})\ \text{cos}\ \frac{1}{2}\ (\text{B}-\text{C})}{2\ \text{sen}\ \frac{1}{2}\ \text{A}\ \text{cos}\ \frac{1}{2}\ \text{A}}$$

Pero como $sen\ \frac{1}{2}\ (\text{B+C})=cos\ \frac{1}{2}\ \text{A}$, se tiene:

$$\frac{b+c}{a}=\frac{\text{cos}\ \frac{1}{2}\ (\text{B}-\text{C})}{\text{sen}\ \frac{1}{2}\ \text{A}}$$

De esta última igualdad sacamos el valor de $B-C$, y como la suma $B+C$ es conocida, pueden averiguarse fácilmente los ángulos B y C.

Si se diera la diferencia $b-c$, se emplearía la fórmula

$$\frac{b-c}{a}=\frac{\text{sen B}-\text{sen C}}{\text{sen A}}$$

PROBLEMA XI— *Resolver un triangulo rectángulo, conociendo la hipotenusa* a *y la altura correspondiente* h.

RESOLUCIÓN—El área del triángulo es $\frac{1}{2}\ a\ h$, y como, según el artículo 32, el área es también igual a $\frac{1}{2}\ bc\ sen\ A$, tenemos:

$$bc\ \text{sen A}=ah$$

y como A vale en este caso 90°, resulta:

$$bc=ah \qquad (1)$$

También tenemos:

$$b^2+c^2=a^2 \qquad (2)$$

Multiplicado por 2 la relación (1), y sumándola con la (2), se tiene:

$$b^2+2bc+c^2=a^2+2ah$$

Y si en lugar de sumar, restamos, tendremos:

$$b^2-2bc+c^2=a^2-2ah$$

De estas dos últimas resulta:

$$b+c=\sqrt{a^2+2ah}$$
$$b-c=\sqrt{a^2-2ah}$$

Conociendo la suma $b+c$ y la diferencia $b-c$, se calculan los lados b y c; y conocidos éstos, queda el problema reducido a un caso común de resolución de triángulos rectángulos.

47. PROBLEMA XII—*Resolver la ecuación*

$$\text{sen}\ x+\frac{17}{8}\text{cos}\ x=-\frac{2}{3}$$

RESOLUCIÓN. Pongamos

$$\text{tang}\ q=\frac{17}{8}$$

siendo q un ángulo auxiliar.

Sustituyendo en la ecuación propuesta, tenemos:

$$\text{sen}\ x+\text{tang}\ q\ \text{cos}\ x=-\tfrac{2}{3}$$

o sea:

$$\text{sen}\ x\ \text{cos}\ q+\text{sen}\ q\ \text{cos}\ x=-\tfrac{2}{3}\ \text{cos}\ q$$

es decir:

$$-\text{sen}\ (q+x)=\tfrac{2}{3}\ \text{cos}\ q \qquad (1)$$

El ángulo q se calcula restando el logaritmo de 8 del de 17, y buscando luégo en las tablas el ángulo correspondiente a la diferencia, sabiendo que la línea auxiliar es la tangente. De este cálculo resulta:

$$q = 64^\circ\ 47'\ 56''$$

Conocido el ángulo q, se calcula el segundo miembro de la igualdad (1), y se tiene:

$$\log\,[\text{sen}\,(q+x)] = \bar{1},4531313$$

y de aquí resulta:

$$x+q = 196^\circ\ 29'\ 30''$$

de donde:

$$x = 131^\circ\ 41'\ 34''$$

48. Problema XIII—*Resolver un triángulo isóseles, conociendo la altura* h *y el radio* r *del círculo inscrito.*

Resolución. Sea ABC (fig. 25) el triángulo, suponiéndolo resuelto.

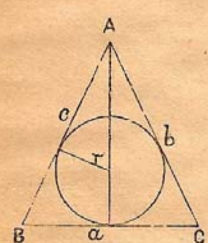


Fig. 25

El ángulo A se calcula por esta relación:

$$r = (h-r)\ \text{sen}\ \tfrac{1}{2}\,A$$

de donde:

$$\text{sen}\ \tfrac{1}{2}A = \frac{r}{h-r}$$

Conociendo el ángulo A, se averiguan fácilmente los otros dos, puesto que cada uno de ellos es complemento de $\tfrac{1}{2}\,A$.

El lado a sale de la relación:

$$\tfrac{1}{2}\,a = h\ \text{tang}\ \tfrac{1}{2}\,A$$

El lado b sale de la relación:

$$h = b\ \text{sen C}$$

El lado c es igual al lado b.

49. Problema XIV—*Comprobar que las relaciones iguales*

$$\frac{a}{\text{sen A}},\quad \frac{b}{\text{sen B}},\quad \frac{c}{\text{sen C}},$$

representan el diámetro del círculo circunscrito al triángulo.

Resolución. Sea ABC (fig. 26) un triángulo inscrito en el círculo O.

Tracemos el diámetro BA' y formemos el triángulo $BA'C$. Tendremos:

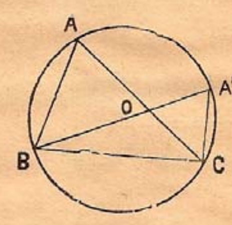


Fig. 26

$$\text{BC} = 2\text{R sen A}'$$

es decir:

$$a = 2\text{R sen A},$$

de donde:

$$\frac{a}{\text{sen A}} = 2\,\text{R}$$

50. Problema XV—*Resolver un triángulo rectángulo con estos datos:*

$$a = 1254 \text{ metros}$$
$$\text{B} = 42^\circ\ 48'$$

Resolución. El ángulo C se obtiene así:

$$\text{C} = 90^\circ - \text{B} = 47^\circ\ 12'$$

Fórmulas:

$$b = a\ \text{sen B}$$
$$c = a\ \cos\text{B}$$
$$\log\ b = \log\ a + \log\ \text{sen B}$$
$$\log\ c = \log\ a + \log\ \cos\text{B}$$

Cálculo de b:

$$\log a = 3{,}09830$$
$$\log \operatorname{sen} B = \bar{1},83215$$
$$\text{Suma} = 2{,}93045$$
$$b = 852^{m},02$$

Cálculo de c:

$$\log a = 3{,}09830$$
$$\log \cos B = \bar{1},86554$$
$$\text{Suma} = 2{,}96384$$
$$c = 920^{m},08$$

51. PROBLEMA XVI—*Resolver un triángulo rectángulo con estos datos:*

$$b = 852^{m},02$$
$$B = 42^{\circ}48'$$

RESOLUCIÓN—El ángulo C se obtiene así:

$$C = 90^{\circ} - B = 47^{\circ}\ 12'$$

Fórmulas:

$$a = \frac{b}{\operatorname{sen} B}$$
$$c = b \cot B$$
$$\log a = \log b - \log \operatorname{sen} B$$
$$\log c = \log b + \log \cot B$$

Cálculo de a:

$$\text{long } b = 2{,}93045$$
$$\log \operatorname{sen} B = \bar{1},83215$$
$$\text{Diferencia} = 3{,}09830$$
$$a = 1254^{m}$$

Cálculo de c:

$$\log b = 2{,}93045$$
$$\log \cot B = 0{,}03338$$
$$\text{Suma} = 2{,}96383$$
$$c = 920^{m},08$$

52. PROBLEMA XVII—*Resolver un triángulo rectángulo con estos datos:*

$$a = 397^{m},70$$
$$b = 388 \text{ metros}$$

RESOLUCIÓN. Las fórmulas son las siguientes:

$$c = \sqrt{[a+b]\ [a-b]}$$
$$b = a \operatorname{sen} B$$
$$b = a \cos C$$

Aplicando los logaritmos, resulta:

$$c = 87^{m},30$$
$$B = 77^{\circ}\ 19'\ 10''$$
$$C = 12^{\circ}\ 40'\ 50''$$

53. PROBLEMA XVIII — *Resolver un triángulo rectángulo con estos datos:*

$$b = 388 \text{ metros}$$
$$c = 87^{m},30$$

RESOLUCIÓN. Las fórmulas son las siguientes:

$$b = c \operatorname{tang} B$$
$$b = c \cot C$$
$$a = \sqrt{b^2 + c^2}$$

Aplicando los logaritmos, resulta:

$$B = 77^{\circ}\ 19'\ 10''$$
$$C = 12^{\circ}\ 40'\ 50''$$
$$a = 397^{m},70$$

54. PROBLEMA XIX—*Resolver un triángulo rectilíneo, no rectángulo, con estos datos:*

$$c = 853^{m},416$$
$$A = 64^{\circ}\ 28'\ 30''$$
$$B = 72^{\circ}\ 13'\ 45'',8$$

RESOLUCIÓN. Las fórmulas son las siguientes:

$$C = 180^{\circ} - (A + B)$$
$$a = \frac{c \operatorname{sen} A}{\operatorname{sen} C}$$
$$b = \frac{c \operatorname{sen} B}{\operatorname{sen} C}$$

Aplicando los logaritmos, resulta:

$$C = 43^{\circ}\ 17'\ 44'',2$$
$$a = 1123^{m},013$$
$$b = 1185^{m},098$$

55. PROBLEMA XX—*Resolver un triángulo rectilíneo, no rectángulo, con estos datos:*

$$a = 342^{m}$$
$$b = 314{,}97$$
$$C = 73^{\circ}\ 19'\ 20''$$

RESOLUCIÓN. Las fórmulas son las siguientes:

$$A+B=180^\circ-C$$

$$\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}(A-B)=\frac{(a-b)\operatorname{tang}\frac{1}{2}(A+B)}{a+b}$$

$$c=\frac{a \operatorname{sen} C}{\operatorname{sen} A}$$

Aplicando los logaritmos, resulta:

$$A=56^\circ\ 30'\ 10''$$
$$B=50^\circ\ 10'\ 30''$$
$$c=392^m,863$$

58. PROBLEMA XXI—*Resolver un triángulo rectilíneo, no rectángulo, con estos datos:*

$$a=853^m,416$$
$$b=1185,098$$
$$A=43^\circ\ 17'\ 44'',2$$

RESOLUCIÓN. Las fórmulas son las siguientes:

$$\operatorname{sen} B=\frac{b \operatorname{sen} A}{a}$$

$$C=180^\circ-(A+B)$$

$$C=\frac{a \operatorname{sen} C}{\operatorname{sen} A}$$

Aplicando los logaritmos, resulta que el problema tiene dos soluciones, lo que se revela en la circunstancia de que *log sen B* aparece negativo. Recomendamos a los alumnos la construcción de los dos triángulos.

57. PROBLEMA XXII—*Resolver un triángulo rectilíneo, no rectángulo, con estos datos:*

$$a=69\ m$$
$$b=78,45$$
$$c=123,53$$

RESOLUCIÓN. Las fórmulas son las siguientes:

$$\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}A=\sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{p(p-a)}}$$

$$\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}B=\sqrt{\frac{(p-a)(p-c)}{p(p-b)}}$$

$$\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}C=\sqrt{\frac{(p-a)(p-b)}{p(p-c)}}$$

Aplicando los logaritmos, resulta:

$$A=31^\circ\ 19'\ 42'',89$$
$$B=35^\circ\ 49'\ 6'',29$$
$$C=112^\circ\ 51'\ 10'',82$$

58. PROBLEMA XXIII—*Medir la altura de una torre cuyo pie es accesible.*

Vamos a medir la altura de la torre A B (fig. 27). En el supuesto de que el terreno es horizontal, se mide una base AD, y se coloca el teodolito en el punto *D*. Se mide el ángulo de elevación BCE, formado por la horizontal y la visual dirigida a la cúspide de la torre.

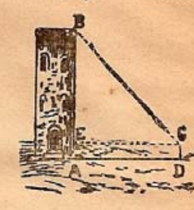


Fig. 27

Hecho esto, se tienen conocidos en el triángulo rectángulo B E C un cateto C E, y un ángulo agudo B C E; con lo cual basta para resolver el triángulo, y deducir la longitud del cateto B E. Agregando a este cateto la longitud E A, que es igual a la altura del instrumento, se tendrá la altura A B.

59. PROBLEMA XXIV—*Medir la altura de una torre cuyo pie es inaccesible.*

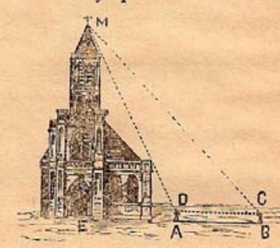


Fig. 28

Vamos a medir la altura de la torre EM (fig. 28). En el supuesto de que el terreno es horizontal, se mide una base A B, en una dirección conveniente. Se coloca el teodolito en el punto A, y se mide el ángulo M D C, formado por la visual D M y la horizontal D C. Se coloca después el teodolito en el punto B, y se mide el ángulo M C D, formado por la visual C M, y la horizontal C D.

Yá conocemos en el triángulo M D C un lado de los dos angulos adyacentes, de manera que podemos deducir la longitud del lado M D. Conocido este lado, podemos resolver el triángulo rectángulo M D E, porque conocemos la hipotenusa M D y el ángulo agudo M D E. Este ángulo puede medirse. Resuelto el triángulo rectángulo MDE, conocemos la altura M E, agregando al resultado la altura del instrumento.

60. Problema XXV—*Medir la altura de una montaña.*

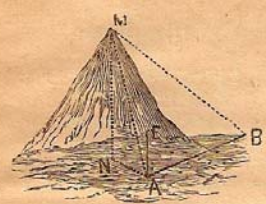


Fig. 29

Propongámonos medir la altura de la montaña M N (fig. 29). Elegimos arbitrariamente una base A B, y colocamos el teodolito en el punto A. Medimos el ángulo M A B, y después colocamos el teodolito en el punto B, para medir el ángulo M B A. Resolvemos con estos datos el triángulo A M B y deducimos la longitud del lado A M. Hecho esto, medimos el ángulo M A E, formado por la visual A M con la vertical A E. Este ángulo es igual al A M N, formado por la visual A M con la altura M N.

En el triángulo rectángulo M A N conocemos, pues, la hipotenusa A M y el ángulo agudo A M N. Resolvemos este triángulo, y deducimos la altura M N.

61. Problema XXVI—*Medir la distancia de un punto accesible a un punto inaccesible.*

Propongámos medir la distancia del punto A (fig. 30) al punto C, en el supuesto de que no podemos llegar a este último punto.

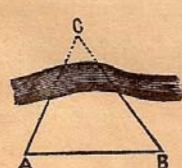


Fig. 30

Para esto medimos una base A B, y colocamos el teodolito en el punto A, para medir el ángulo CAB formado por la visual A C y la base AB. Colocamos después el teodolito en el punto B, y medimos elángulo C B A, formado por la visual B C y la base A B. Con estos datos resolvemos el triángulo ABC, y deducimos la longitud AC, que es la que buscamos.

62. Problema XXVII—*Medir la distancia de dos puntos inaccesibles.*

Propongámos medir la distancia DC (fig. (31), en el supuesto de que no podemos llegar a ninguno de los puntos D y C.

Medimos en el terreno una base AB, y colocamos el teodolito en el punto A. En este punto medimos los angulos D A B y C A B. Colocamos después el teodolito en el punto B, y medimos en este punto los ángulos C B A y D B A.

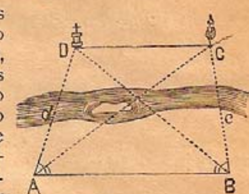


Fig. 31

Resolvemos ahora el triángulo A C B, para lo cual conocemos el lado A B y los ángulos en A y en B. De la resolución de este triángulo deducimos la longitud del lado AC. Después resolvemos el triángulo DAB, para lo cual conocemos el lado AB, y los angulos en A y en B. De la resolución de este triángulo deducimos la longitud del lado AD. Resolvemos, por último, el triángulo D A|C, para lo cual conocemos el lado AC, el lado AD, y el ángulo comprendido. De la resolución de este triángulo deducimos la distancia buscada D C.

63. Problema XXVIII — *Determinar sobre un mapa la posición de un punto P* (fig. 32), *conociendo la posición de tres puntos A, B y C, y los ángulos bajo los cuales se han medido las distancias CA y CB.*

Para resolver este problema, llamado *problema de Pothenot* o *problema de la carta*, representemos por m y n los ángulos APC y BPC, y por x e y los ángulos CAP y CBP. Llamemos a y b las longitudes conocidas AC y BC, y δ el ángulo ACB.

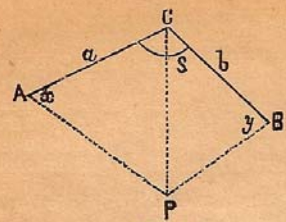


Fig. 32

En el triángulo ACP, tenemos:

$$CP : a = \text{sen } x : \text{sen } m$$

de donde:

$$CP=\frac{a \text{ sen } x}{\text{sen } m}$$

En el triángulo BCP tenemos:

$$CP : b = \text{sen } y : \text{sen } n$$

de donde:

$$CP=\frac{b \text{ sen } y}{\text{sen } n}$$

Por consiguiente:

$$\frac{a \text{ sen } x}{\text{sen } m}=\frac{b \text{ sen } y}{\text{sen } n}$$

o sea:

$$\frac{\text{sen } x}{b \text{ sen } m}=\frac{\text{sen } y}{a \text{ sen } n}$$

Considerando esta igualdad como una proporción, y aplicando una de las propiedades de las proporciones, tenemos:

$$\frac{\text{sen } x+\text{sen } y}{b \text{ sen } m+a \text{ sen } n}=\frac{\text{sen } x-\text{sen } y}{b \text{ sen } m-a \text{ sen } n}$$

o sea:

$$\frac{\text{sen } x-\text{sen } y}{\text{sen } x+\text{sen } y}=\frac{b \text{ sen } m-a \text{ sen } n}{b \text{ sen } m+a \text{ sen } n}$$

o sea:

$$\frac{2 \cos \frac{1}{2}(x+y) \text{sen } \frac{1}{2}(x-y)}{2 \text{ sen } \frac{1}{2}(x+y) \cos \frac{1}{2}(x-y)}=\frac{b \text{ sen } m-a \text{ sen } n}{b \text{ sen } m+a \text{ sen } n}$$

o sea:

$$\frac{\text{tang } \frac{1}{2}(x-y)}{\text{tang } \frac{1}{2}(x+y)}=\frac{b \text{ sen } m-a \text{ sen } n}{b \text{ sen } m+a \text{ sen } n} \qquad (1)$$

Calculamos ahora la suma de los ángulos x e y, así:

$$x+y=360^\circ-(m+n+\delta),$$

de donde:

$$\frac{x+y}{2}=180-\frac{m+n+\delta}{2}$$

De la fórmula (1) sacamos:

$$\text{tang } \tfrac{1}{2}(x-y)=\text{tang } \tfrac{1}{2}(x+y) \times \frac{b \text{ sen } m-a \text{ sen } n}{b \text{ sen } m+a \text{ sen } n}$$

Como esta fórmula no es calculable por logaritmos, vamos a trasformarla en otra equivalente y que lo sea. Escribámosla en la forma:

$$\text{tang } \tfrac{1}{2}(x-y)=\text{tang } \tfrac{1}{2}(x+y) \times \frac{1-\frac{a \text{ sen } n}{b \text{ sen } m}}{1+\frac{a \text{ sen } n}{b \text{ sen } m}}$$

y supongamos que:

$$\frac{a \text{ sen } n}{b \text{ sen } m}=\text{tang } \psi$$

Entonces tenemos:

$$\text{tang } \tfrac{1}{2}(x-y)=\text{tang } \tfrac{1}{2}(x+y) \times \frac{1-\text{tang } \psi}{1+\text{tang } \psi} \qquad (2)$$

En virtud de lo dicho en el artículo 36, la tangente de 45° es igual a 1 puesto que son iguales el seno y el coseno de ese arco. De manera que si en las relaciones halladas en los artículos 16 y 17 hacemos $a=45°$, nos resultará:

$$\text{tang } (45^\circ+b)=\frac{1+\text{tang } b}{1-\text{tang } b}$$

$$\text{tang } (45^\circ-b)=\frac{1-\text{tang } b}{1+\text{tang } b}$$

De esto se colige que la expresión (2) puede escribirse así:

$$\operatorname{tang} \tfrac{1}{2}(x-y) = \operatorname{tang} \tfrac{1}{2}(x+y) \times \operatorname{tang}(45^\circ - \psi)$$

Conociendo la suma y la diferencia de los ángulos x e y, se calcula fácilmente cada uno de ellos.

64. Problema XXIX — *Determinar el área del cuadrilátero ABCD del artículo 62, con estos datos:*

$$AB = 2722^{m},67$$
$$DAB = 54^\circ 18' 13''$$
$$CAB = 41^\circ 23' 48''$$
$$ABC = 83^\circ 15' 24''$$
$$ABD = 37^\circ 23' 55''$$

Resolución—Llamando Q al área del cuadrilátero, y teniendo en cuenta la primera expresión del área de un triángulo, obtenida en el artículo 32, resulta:

$$Q = \tfrac{1}{2}\, AB \times AC \times \operatorname{sen} CAB + \tfrac{1}{2}\, AC \times AD \times \operatorname{sen} CAD$$

o sea:

$$Q = \tfrac{1}{2} \times 2722{,}67 \times AC \times \operatorname{sen} 41^\circ 23' 48'' + \tfrac{1}{2} AC \times AD \times \operatorname{sen} 12^\circ 54' 25''$$

Los lados AC y AD se calculan como se dijo en el artículo 62, y después de calculados esos lados se calcula el área del cuadrilátero. Resulta:

$$Q = 357100 \text{ metros cuadrados}$$

65. Problema XXX—*Determinar el radio de una torre o recinto circular inaccesible.*

Medimos una base AB (fig. 33), y los ángulos formados en A y B por dicha base y los rayos visuales tangentes del círculo. Llamemos $AB = d$, $OC = x$, $MAB = k$, $PAB = k'$, $M'BA = h$ y $NBA = h'$.

Como las rectas AO y BO son las bisectrices de los ángulos MAP y M'BN, respectivamente, tenemos en el triángulo AOB:

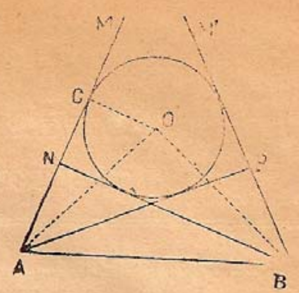


Fig. 33

$$AO = \frac{d \operatorname{sen} \frac{1}{2}(h+h')}{\operatorname{sen} \frac{1}{2}(k+k'+h+h')}$$

Ahora en el triángulo rectángulo OCA, se tiene:

$$OC = x = AO \operatorname{sen} \tfrac{1}{2}(k-k')$$

de donde:

$$x = \frac{d \operatorname{sen} \frac{1}{2}(k-k') \operatorname{sen} \frac{1}{2}(h+h')}{\operatorname{sen} \frac{1}{2}(k+k'+h+h')}$$

Si en vez de calcular a AO, calculamos a BO, obtenemos:

$$x = \frac{d \operatorname{sen} \frac{1}{2}(h-h') \operatorname{sen} \frac{1}{2}(k+k')}{\operatorname{sen} \frac{1}{2}(k+k'+h+h')}$$

Y si comparamos los dos valores de x, se obtiene la ecuación:

$$\frac{\operatorname{sen} \frac{1}{2}(k-k')}{\operatorname{sen} \frac{1}{2}(k+k')} = \frac{\operatorname{sen} \frac{1}{2}(h-h')}{\operatorname{sen} \frac{1}{2}(h+h')}$$

A esta ecuación deben satisfacer los ángulos observados; de modo que sirve para saber si el problema es posible, y para averiguar si las operaciones sobre el terreno se han ejecutado con exactitud.

FIN DE LA TRIGOMETRÍA RECTILÍNEA

PARTE SEGUNDA

TRIGONOMETRIA ESFERICA

LECCION SEPTIMA

Fórmulas principales de la Trigonometría esférica

66. Definicion y propiedades de los triángulos esféricos — Si consideramos el centro de una esfera como vértice de un ángulo triedro cuyas caras estén todas situadas a un mismo lado respecto de un plano que pase por dicho centro, los planos de las caras del ángulo triedro encuentran a la superficie esférica en arcos que, cortándose de dos en dos, determinan una figura llamada *triángulo esférico.*

Un triángulo esférico consta de seis elementos: tres ángulos y tres lados. Los ángulos son en valor los mismos ángulos diedros del ángulo triedro, y los lados son los arcos de círculo máximo que por sus mutuas intersecciones forman el triángulo.

En el curso de Geometría se estudian las propiedades de los triángulos esféricos, pero no está por demás que consignemos aquí las principales. Son las siguientes:

1.ª *Cada lado es menor que una semicircunferencia;*

2.ª *Un lado cualquiera es menor que la suma de los otros dos;*

3.ª *La suma de los tres lados es menor que una circunferencia;*

4.ª *La suma de los ángulos es mayor que dos rectos, y menor que seis;*

5.ª *El triángulo esférico* rectángulo *es el que tiene un solo ángulo recto;* birectángulo *el que tiene dos, y* trirectángulo *el que tiene tres;*

6.ª *Los ángulos que no son rectos se llaman ángulos* oblicuos;

7.ª *En todo triángulo esférico rectángulo, cada lado es menor que 90°; o uno de ellos es menor, y los otros dos son mayores que 90°;*

8.ª *En un triángulo esférico rectángulo, cada cateto y su ángulo opuesto son ambos menores o ambos mayores que 90°. En el primer caso, el cateto es menor que el ángulo opuesto; y en el segundo, el cateto es mayor que el ángulo opuesto;*

9.ª *En un triángulo esférico rectángulo, ningún lado puede valer 90°;*

10.ª *Si un cateto es menor que 90°, la hipotenusa será mayor que el cateto, y menor que el suplemento del cateto; y si un cateto es mayor que 90°, la hipotenusa serámenor que el cateto, y mayor que el suplemento del cateto;*

11.ª *La suma de los dos ángulos oblicuos de un triángulo esférico rectángulo es mayor que 90°, y menor que 270°, y*

12.ª *El área de un triángulo esférico es igual al exceso de las sumas de sus ángulos sobre dos rectos, multiplicado por el triángulo trirectángulo.*

La Trigonometría esférica, como lo hemos dicho antes, se propone resolver los triángulos esféricos. Para determinar un triángulo esférico, basta conocer tres de sus elementos, cualesquiera que sean; de suerte que no es preciso, como en los triángulos rectilíneos, que entre los datos figure algún lado.

Trataremos de buscar las relaciones que existen entre los elementos de un triángulo esférico; y con tal objeto formaremos grupos de las fórmulas de una misma especie.

67. Primer grupo de fórmulas—*Constituyen este grupo las relaciones entre los tres lados y un ángulo.*

Sea O el centro de la esfera (fig. 34), y OABC el ángulo triedro que determina sobre la esfera el triángulo esférico ABC. Supongamos que los lados b y c son menores que 90°, y que a tiene un valor cualquiera menor de 180°. A partir del punto O, tenemos en la arista OA una distancia OK igual a la unidad. En el punto K, y en el plano AOC, levantemos una perpendicular KG a OA; y en el mismo punto

K, en el plano OAB, levantemos una perpendicular KF a OA. Unamos ahora los puntos F y G.

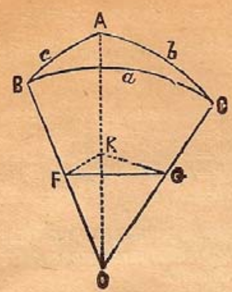


Fig. 34

Las dos perpendiculares KG y KF encontrarán a los radios OC y OB dentro de los ángulos AOC y AOB, por ser éstos agudos por hipótesis; y el ángulo plano FKG será la medida del diedro $BAOC$, o del ángulo A del triángulo esférico.

En los triángulos KFG y FOG, tenemos, respectivamente (art. 29):

$$FG^2 = KF^2 + KG^2 - 2KF \times KG \cos A$$
$$FG^2 = OF^2 + OG^2 - 2OF \times OG \cos a$$

Restando miembro de miembro, sirviendo de minuendo la segunda, resulta:

$$0 = OF^2 - KF^2 + OG^2 - KG^2 - 2OF \times OG \cos a + 2KF \times KG \cos A$$

Pero notando que $OF^2 - KF^2$ es igual a OK^2, es decir a 1; y que lo mismo sucede con $OG^2 - KG^2$, se tiene:

$$0 = 2 - 2OF \times OG \cos a + 2KF \times KG \cos A$$

Observamos ahora que KF es la tangente de c, que KG es la tangente de b, que OF es la secante de c, y que OG es la secante de b. Reemplazando, y dividiendo por 2, se tiene:

$$0 = 1 - \sec c \sec b \cos a + \operatorname{tang} c \operatorname{tang} b \cos A.$$

Poniendo en lugar de la secante el inverso del coseno, y en lugar de la tangente la relación del seno al coseno, se tiene:

$$0 = 1 - \frac{\cos a}{\cos b \cos c} + \frac{\operatorname{sen} b \operatorname{sen} c \cos A}{\cos b \cos c}$$

De aquí resulta:

$$\cos a = \cos b \cos c + \operatorname{sen} b \operatorname{sen} c \cos A \quad (1)$$

Por analogía, podemos escribir:

$$\cos b = \cos a \cos c + \operatorname{sen} a \operatorname{sen} c \cos B \quad (2)$$
$$\cos c = \cos a \cos b + \operatorname{sen} a \operatorname{sen} b \cos C \quad (3)$$

Las fórmulas (1), (2) y (3), que acabamos de encontrar, se llaman las *fundamentales* de la Trigonometría esférica, porque de ellas se deducen todas las demás.

NOTA—Acabamos de buscar las relaciones fundamentales, en la suposición de ser menores que 90° los lados b y c; mas estas relaciones tienen también lugar aun cuando b y c sean el uno agudo y el otro recto, el uno agudo y el otro obtuso, ambos rectos, el uno recto y el otro obtuso, o ambos obtusos. Prescindimos de la generalización de tales relaciones.

68. SEGUNDO GRUPO DE FÓRMULAS— *Constituyen este grupo las relaciones entre dos lados y los ángulos opuestos.*

Sumando miembro a miembro las fórmulas (1) y (2), se tiene:

$$\cos a + \cos b = \cos c (\cos a + \cos b) + \operatorname{sen} c (\operatorname{sen} b \cos A + \operatorname{sen} a \cos B)$$

o sea:

$$(\cos a + \cos b)(1 - \cos c) = \operatorname{sen} c (\operatorname{sen} b \cos A + \operatorname{sen} a \cos B) \quad (f)$$

Restando miembro de miembro las mismas dos fórmulas (1) y (2), resulta:

$$\cos a - \cos b = \cos c (\cos b - \cos a) + \operatorname{sen} c (\operatorname{sen} b \cos A - \operatorname{sen} a \cos B)$$

o sea:

$$(\cos a - \cos b)(1 + \cos c) = \operatorname{sen} c (\operatorname{sen} b \cos A - \operatorname{sen} a \cos B) \quad (g)$$

Multiplicando miembro a miembro las dos expresiones (f) y (g), se tiene:

$$(\cos^2 a - \cos^2 b)(1 - \cos^2 c) = \operatorname{sen}^2 c (\operatorname{sen}^2 b \cos^2 A - \operatorname{sen}^2 a \cos^2 B)$$

Pero como $1 - \cos^2 c$ es igual á $\operatorname{sen}^2 c$ (art. 12), tenemos:

$$\cos^2 a - \cos^2 b = \operatorname{sen}^2 b \cos^2 A - \operatorname{sen}^2 a \cos^2 B$$

Poniendo en lugar de $cos^2\, a$ y $cos^2\, b$ sus equivalentes respectivos $1 - sen^2\, a$, $1 - sen^2\, b$, resulta:

$$\text{sen}^2\, b - \text{sen}^2\, a = \text{sen}^2\, b \cos^2 A - \text{sen}^2\, a \cos^2 B$$

es decir:

$$\text{sen}^2\, b\,(1 - \cos^2 A) = \text{sen}^2\, a\,(1 - \cos^2 B)$$

o sea:

$$\text{sen}^2\, b\, \text{sen}^2 A = \text{sen}^2\, a\, \text{sen}^2 B$$

de donde:

$$\text{sen}\, b\, \text{sen}\, A = \text{sen}\, a\, \text{sen}\, B$$

o sea:

$$\text{sen}\, a : \text{sen}\, b = \text{sen}\, A : \text{sen}\, B \qquad (4)$$

Por desarrollos semejantes llegaríamos a estas otras dos proporciones:

$$\text{sen}\, a : \text{sen}\, c = \text{sen}\, A : \text{sen}\, C \qquad (5)$$
$$\text{sen}\, b : \text{sen}\, c = \text{sen}\, B : \text{sen}\, C \qquad (6)$$

Las fórmulas (4), (5) y (6) significan que «*en todo triángulo esférico, los senos de los lados son proporcionales a los senos de los ángulos respectivamente opuestos*».

69. Tercer grupo de fórmulas—*Constituyen este grupo las relaciones entre dos lados, el ángulo comprendido, y el ángulo opuesto a uno de ellos.*

Pongamos en lugar de $cos\, c$, en la fórmula (1), la expresión dada por la fórmula (3), y tenemos:

$$\cos a = \cos b\, (\cos a \cos b + \text{sen}\, a\, \text{sen}\, b \cos C) + \text{sen}\, b\, \text{sen}\, c \cos A \qquad (h)$$

Sustituyamos ahora en esta última el valor de $sen\, c$ sacado de la fórmula (5), y queda:

$$\cos a = \cos a \cos^2 b + \text{sen}\, a\, \text{sen}\, b \cos b \cos C + \text{sen}\, b \cos A \frac{\text{sen}\, a\, \text{sen}\, C}{\text{sen}\, A}$$

o sea:

$$\cos a - \cos a \cos^2 b = \text{sen}\, a\, \text{sen}\, b\, (\cos b \cos C + \text{sen}\, C \cot A)$$

es decir:

$$\cos a\, \text{sen}^2\, b = \text{sen}\, a\, \text{sen}\, b\, (\cos b \cos C + \text{sen}\, C \cot A)$$

Dividiendo por $sen\, a\, sen\, b$, resulta:

$$\cot a\, \text{sen}\, b = \cos b \cos C + \text{sen}\, C \cot A \qquad (7)$$

Por analogía podemos escribir las siguientes:

$$\cot a\, \text{sen}\, c = \cos c \cos B + \text{sen}\, B \cot A \qquad (8)$$
$$\cot b\, \text{sen}\, c = \cos c \cos A + \text{sen}\, A \cot B \qquad (9)$$
$$\cot b\, \text{sen}\, a = \cos a \cos C + \text{sen}\, C \cot B \qquad (10)$$
$$\cot c\, \text{sen}\, a = \cos a \cos B + \text{sen}\, B \cot C \qquad (11)$$
$$\cot c\, \text{sen}\, b = \cos b \cos A + \text{sen}\, A \cot C \qquad (12)$$

70. Cuarto grupo de fórmulas—*Constituyen este grupo las relaciones entre un lado y los tres ángulos.*

Dividiendo por $sen\, b$ la expresión (h), se tiene:

$$\cos a\, \text{sen}\, b = \text{sen}\, a \cos b \cos C + \text{sen}\, c \cos A$$

o sea:

$$\cos a = \frac{\text{sen}\, a}{\text{sen}\, b} \cos b \cos C + \frac{\text{sen}\, c}{\text{sen}\, b} \cos A$$

Pero como en virtud de la fórmula (4) tenemos que $\frac{\text{sen}\, a}{\text{sen}\, b}$ es igual a $\frac{\text{sen}\, A}{\text{sen}\, B}$, y en virtud de la fórmula (6) tenemos que $\frac{\text{sen}\, c}{\text{sen}\, b}$ es igual a $\frac{\text{sen}\, C}{\text{sen}\, B}$, resulta:

$$\cos a = \frac{\text{sen}\, A}{\text{sen}\, B} \cos b \cos C + \frac{\text{sen}\, C}{\text{sen}\, B} \cos A$$

o sea:

$$\cos a\, \text{sen}\, B = \cos b\, \text{sen}\, A \cos C + \text{sen}\, C \cos A$$

Haciendo desarrollos análogos con la fórmula (2), es decir, reemplazando en esta fórmula por $cos\, c$ el valor dado por la fórmula (3), y ejecutando luégo operaciones semejantes, obtendríamos:

$$\cos b\, \text{sen}\, A = \cos a\, \text{sen}\, B \cos C + \text{sen}\, C \cos B$$

Sacando a $cos\, b$ de cada una de las dos últimas expresiones, e igualando los resultados, se tiene:

$$\frac{\cos a \,\text{sen}\, B \,\text{sen}\, C \cos A}{\text{sen}\, A \cos C} = \frac{\cos a \,\text{sen}\, B \cos C + \text{sen}\, C \cos B}{\text{sen}\, A}$$

o sea:

$$\cos a \,\text{sen}\, B \,\text{sen}\, A - \text{sen}\, C \cos A \,\text{sen}\, A = \cos a \,\text{sen}\, B \,\text{sen}\, A \cos^2 C + \text{sen}\, C \cos B \,\text{sen}\, A \cos C$$

o sea:

$$\cos a \,\text{sen}\, A \,\text{sen}\, B (1 - \cos^2 C) = \text{sen}\, A \,\text{sen}\, C (\cos A + \cos B \cos C)$$

o sea:

$$\cos a \,\text{sen}\, A \,\text{sen}\, B \,\text{sen}^2 C = \text{sen}\, A \,\text{sen}\, C (\cos A + \cos B \cos C)$$

de donde:

$$\cos a \,\text{sen}\, B \,\text{sen}\, C = \cos A + \cos B \cos C$$

y por último:

$$\cos A = -\cos B \cos C + \text{sen}\, B \,\text{sen}\, C \cos a \qquad (13)$$

Análogamente llegaríamos a estas otras:

$$\cos B = -\cos C \cos A + \text{sen}\, C \,\text{sen}\, A \cos b \qquad (14)$$

$$\cos C = -\cos A \cos B + \text{sen}\, A \,\text{sen}\, B \cos c \qquad (15)$$

71. Expresiones de los ángulos de un triángulo esférico en función de los lados – Si se despeja a *cos A* de la fórmula (1), se tiene:

$$\cos A = \frac{\cos a - \cos b \cos c}{\text{sen}\, b \,\text{sen}\, c}$$

Reemplacemos este valor en las fórmulas de $\text{sen}\frac{A}{2}$ y $\cos\frac{A}{2}$ de la Trigonometría rectilínea (artículo 19), y tendremos:

$$\text{sen}\,\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{\cos b \cos c + \text{sen}\, b \,\text{sen}\, c - \cos a}{2 \,\text{sen}\, b \,\text{sen}\, c}}$$

$$\cos\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{\cos a - \cos b \cos c + \text{sen}\, b \,\text{sen}\, c}{2 \,\text{sen}\, b \,\text{sen}\, c}}$$

Estas dos expresiones pueden transformarse así (Artículos 14 y 15):

$$\text{sen}\,\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{\cos (b-c) - \cos a}{2 \,\text{sen}\, b \,\text{sen}\, c}}$$

$$\cos\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{\cos a - \cos (b+c)}{2 \,\text{sen}\, b \,\text{sen}\, c}}$$

Todavía pueden ponerse así (art. 20):

$$\text{sen}\,\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{\text{sen}\,\frac{1}{2}(a+c-b)\,\text{sen}\,\frac{1}{2}(a+b-c)}{\text{sen}\, b \,\text{sen}\, c}}$$

$$\cos\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{\text{sen}\,\frac{1}{2}(a+b+c)\,\text{sen}\,\frac{1}{2}(b+c-a)}{\text{sen}\, b \,\text{sen}}}$$

Haciendo $a+b+c=2p$, resulta:

$$\text{sen}\,\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{\text{sen}\,(p-b)\,\text{sen}\,(p-c)}{\text{sen}\, b \,\text{sen}\, c}} \qquad (16)$$

$$\cos\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{\text{sen}\, p \,\text{sen}\,(p-a)}{\text{sen}\, b \,\text{sen}\, c}} \qquad (17)$$

Dividiendo estas dos, se tiene:

$$\text{tang}\,\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{\text{sen}\,(p-b)\,\text{sen}\,(p-c)}{\text{sen}\, p \,\text{sen}\,(p-a)}} \qquad (18)$$

De estas maneras queda el ángulo A expresado en función de los lados. Semejantemente pueden expresarse los ángulos B y C.

72. Expresión de los lados de un triángulo esférico en función de los ángulos—Si se despeja a *cos a* de la fórmula (13), se obtiene:

$$\cos a = \frac{\cos A + \cos B \cos C}{\text{sen}\, B \,\text{sen}\, C}$$

Reemplazando estos valores en las fórmulas de $\text{sen}\,\frac{a}{2}$ y $\cos\frac{a}{2}$, resulta:

$$\text{sen}\,\frac{a}{2} = \sqrt{\frac{\text{sen}\, B \,\text{sen}\, C - \cos B \cos C - \cos A}{2 \,\text{sen}\, B \,\text{sen}\, C}}$$

$$\cos\frac{a}{2}=\sqrt{\frac{\operatorname{sen}B\operatorname{sen}C+\cos B\cos C+\cos A}{2\operatorname{sen}B\operatorname{sen}C}}$$

Estas dos expresiones pueden trasformarse así:

$$\operatorname{sen}\frac{a}{2}=\sqrt{\frac{-\cos A+\cos(B+C)}{2\operatorname{sen}B\operatorname{sen}C}}$$

$$\cos\frac{a}{2}=\sqrt{\frac{\cos A+\cos(B-C)}{2\operatorname{sen}B\operatorname{sen}C}}$$

Todavía pueden ponerse así:

$$\operatorname{sen}\frac{a}{2}=\sqrt{\frac{-\cos\frac{1}{2}(A+B+C)\cos\frac{1}{2}(B+C-A)}{\operatorname{sen}B\operatorname{sen}C}}$$

$$\cos\frac{a}{2}=\sqrt{\frac{\cos\frac{1}{2}(A+B-C)\cos\frac{1}{2}(A+C-B)}{\operatorname{sen}B\operatorname{sen}C}}$$

Haciendo $A+B+C=2S+\pi$, se tiene:

$$\tfrac{1}{2}(A+B+C)=S+\frac{\pi}{2}$$

$$\tfrac{1}{2}(B+C-A)=S-A+\frac{\pi}{2}$$

$$\tfrac{1}{2}(A+B-C)=S-C+\frac{\pi}{a}$$

$$\tfrac{1}{2}(A+C-B)=S-B+\frac{\pi}{2}$$

Sustituyendo, resulta:

$$\operatorname{sen}\frac{a}{2}=\sqrt{\frac{-\cos\left(S+\frac{\pi}{2}\right)\cos\left(S-A+\frac{\pi}{2}\right)}{\operatorname{sen}B\operatorname{sen}C}}$$

$$\cos\frac{a}{2}=\sqrt{\frac{\cos\left(S-C+\frac{\pi}{2}\right)\cos\left(S-B+\frac{\pi}{2}\right)}{\operatorname{sen}B\operatorname{sen}C}}$$

Teniendo en cuenta lo expuesto en el artículo 11 de la Trigonometría rectilínea, podemos poner:

$$\operatorname{sen}\frac{a}{2}=\sqrt{\frac{\operatorname{sen}S\operatorname{sen}(A-S)}{\operatorname{sen}B\operatorname{sen}C}}\qquad(19)$$

$$\cos\frac{a}{2}=\sqrt{\frac{\operatorname{sen}(B-S)\operatorname{sen}(C-S)}{\operatorname{sen}B\operatorname{sen}C}}\qquad(20)$$

Dividiendo estas dos, resulta:

$$\operatorname{tang}\frac{a}{2}=\sqrt{\frac{\operatorname{sen}S\operatorname{sen}(A-S)}{\operatorname{sen}(B-S)\operatorname{sen}(C-S)}}\qquad(21)$$

De estas maneras queda el lado a expresado en función de los ángulos. Semejantemente pueden expresarse los lados b y c.

NOTA—La cantidad $2\,S$ que figura en estas fórmulas representa el exceso de la suma de los ángulos sobre dos rectos. Esta cantidad se llama *exceso esférico*.

73. FÓRMULAS DE DELAMBRE—Pongamos la fórmula del seno de la suma de dos arcos (artículo 14):

$$\operatorname{sen}(A+B)=\operatorname{sen}A\cos B+\cos A\operatorname{sen}B,$$

y reemplacemos por A y por B sus mitades. Tendremos:

$$\operatorname{sen}\frac{A+B}{2}=\operatorname{sen}\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}+\cos\frac{A}{2}\operatorname{sen}\frac{B}{2}$$

Sustituyendo aquí los valores dados por las fórmulas (16) y (17), resulta:

$$\operatorname{sen}\frac{A+B}{2}=\sqrt{\frac{\operatorname{sen}(p-b)\operatorname{sen}(p-c)}{\operatorname{sen}b\operatorname{sen}c}}\times\sqrt{\frac{\operatorname{sen}p\operatorname{sen}(p-b)}{\operatorname{sen}a\operatorname{sen}c}}+\sqrt{\frac{\operatorname{sen}p\operatorname{sen}(p-a)}{\operatorname{sen}b\operatorname{sen}c}}\times\sqrt{\frac{\operatorname{sen}(p-a)\operatorname{sen}(p-c)}{\operatorname{sen}a\operatorname{sen}c}}$$

o sea:

$$\operatorname{sen}\frac{A+B}{2}=\frac{\operatorname{sen}(p-b)}{\operatorname{sen}c}\times\sqrt{\frac{\operatorname{sen}p\operatorname{sen}(p-c)}{\operatorname{sen}a\operatorname{sen}b}}+\frac{\operatorname{sen}(p-a)}{\operatorname{sen}c}\times\sqrt{\frac{\operatorname{sen}p\operatorname{sen}(p-c)}{\operatorname{sen}a\operatorname{sen}b}}$$

es decir:

$$\operatorname{sen}\frac{A+B}{2}=\frac{\operatorname{sen}(p-b)+\operatorname{sen}(p-a)}{\operatorname{sen} c}\times\sqrt{\frac{\operatorname{sen} p \operatorname{sen}(p-c)}{\operatorname{sen} a \operatorname{sen} b}}$$

o sea:

$$\operatorname{sen}\frac{A+B}{2}=\frac{2\operatorname{sen}\frac{1}{2}(p-a+p-b)\cos\frac{1}{2}(p-b-p+a)}{2\operatorname{sen}\frac{1}{2}c\cos\frac{1}{2}c}\times\cos\frac{C}{2}$$

o sea:

$$\frac{\operatorname{sen}\frac{A+B}{2}}{\cos\frac{C}{2}}=\frac{\cos\frac{a-b}{2}}{\cos\frac{c}{2}} \qquad (22)$$

Esta es una de las cuatro fórmulas de Delambre. Las otras tres se deducirán análogamente, y son estas:

$$\frac{\operatorname{sen}\frac{A-B}{2}}{\cos\frac{C}{2}}=\frac{\operatorname{sen}\frac{a-b}{2}}{\operatorname{sen}\frac{c}{2}} \qquad (23)$$

$$\frac{\cos\frac{A+B}{2}}{\operatorname{sen}\frac{C}{2}}=\frac{\cos\frac{a+b}{2}}{\cos\frac{c}{2}} \qquad (24)$$

$$\frac{\cos\frac{A-B}{2}}{\operatorname{sen}\frac{C}{2}}=\frac{\operatorname{sen}\frac{a+b}{2}}{\operatorname{sen}\frac{c}{2}} \qquad (25)$$

74. Analogías de Neper—Dividiendo miembro a miembro la fórmula (22) por la (24), la (23) por la (25), la (25) por la (24), y la (23) por la (22), se obtienen cuatro fórmulas aplicables en la resolución de triángulos. Se llaman *analogías de Neper*, y son las siguientes:

$$\frac{\operatorname{tang}\frac{A+B}{2}}{\cot\frac{C}{2}}=\frac{\cos\frac{a-b}{2}}{\cos\frac{a+b}{2}} \qquad (26)$$

$$\frac{\operatorname{tang}\frac{A-B}{2}}{\cot\frac{C}{2}}=\frac{\operatorname{sen}\frac{a-b}{2}}{\operatorname{sen}\frac{a+b}{2}} \qquad (27)$$

$$\frac{\operatorname{tang}\frac{a+b}{2}}{\operatorname{tang}\frac{c}{2}}=\frac{\cos\frac{A-B}{2}}{\cos\frac{A+B}{2}} \qquad (28)$$

$$\frac{\operatorname{tang}\frac{a-b}{2}}{\operatorname{tang}\frac{c}{2}}=\frac{\operatorname{sen}\frac{A-B}{2}}{\operatorname{sen}\frac{A+B}{2}} \qquad (29)$$

75. Formulario—Con el fin de que cuando haya necesidad de consultar una fórmula, se le pueda encontrar prontamente, vamos a consignar en este artículos todas las que hemos deducido en Trigonometría esférica.

1. $\cos a=\cos b\cos c+\operatorname{sen} b\operatorname{sen} c\cos A$.
2. $\cos b=\cos a\cos c+\operatorname{sen} a\operatorname{sen} c\cos B$.
3. $\cos c=\cos a\cos b+\operatorname{sen} a\operatorname{sen} b\cos C$.
4. $\operatorname{sen} a : \operatorname{sen} b=\operatorname{sen} A : \operatorname{sen} B$.
5. $\operatorname{sen} a : \operatorname{sen} c=\operatorname{sen} A : \operatorname{sen} C$.
6. $\operatorname{sen} b : \operatorname{sen} c=\operatorname{sen} B : \operatorname{sen} C$.
7. $\cot a\operatorname{sen} b=\cos b\cos C+\operatorname{sen} C\cot A$.
8. $\cot a\operatorname{sen} c=\cos c\cos B+\operatorname{sen} B\cot A$.
9. $\cot b\operatorname{sen} c=\cos c\cos A+\operatorname{sen} A\cot B$.
10. $\cot b\operatorname{sen} a=\cos a\cos C+\operatorname{sen} C\cot B$.
11. $\cot c\operatorname{sen} a=\cos a\cos B+\operatorname{sen} B\cot C$.
12. $\cot c\operatorname{sen} b=\cos b\cos A+\operatorname{sen} A\cot C$.
13. $\cos A=-\cos B\cos C+\operatorname{sen} B\operatorname{sen} C\cos a$.
14. $\cos B=-\cos A\cos C+\operatorname{sen} A\operatorname{sen} C\cos b$.
15. $\cos C=-\cos A\cos B+\operatorname{sen} A\operatorname{sen} B\cos c$.
16. $\operatorname{sen}\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{\operatorname{sen}(p-b)\operatorname{sen}(p-c)}{\operatorname{sen} b\operatorname{sen} c}}$
17. $\cos\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{\operatorname{sen} p\operatorname{sen}(p-a)}{\operatorname{sen} b\operatorname{sen} c}}$
18. $\operatorname{tang}\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{\operatorname{sen}(p-b)\operatorname{sen}(p-c)}{\operatorname{sen} p\operatorname{sen}(p-a)}}$
19. $\operatorname{sen}\frac{a}{2}=\sqrt{\frac{\operatorname{sen} S\operatorname{sen}(A-S)}{\operatorname{sen} B\operatorname{sen} C}}$
20. $\cos\frac{a}{2}=\sqrt{\frac{\operatorname{sen}(B-S)\operatorname{sen}(C-S)}{\operatorname{sen} B\operatorname{sen} C}}$

21. $\operatorname{tang}\frac{a}{2}=\sqrt{\frac{\operatorname{sen} S \operatorname{sen}(A-S)}{\operatorname{sen}(B-S)\operatorname{sen}(C-S)}}$

22. $$\frac{\operatorname{sen}\frac{A+B}{2}}{\cos\frac{C}{2}}=\frac{\cos\frac{a-b}{2}}{\cos\frac{c}{2}}$$

23. $$\frac{\operatorname{sen}\frac{A-B}{2}}{\cos\frac{C}{2}}=\frac{\operatorname{sen}\frac{a-b}{2}}{\operatorname{sen}\frac{c}{2}}$$

24. $$\frac{\cos\frac{A+B}{2}}{\operatorname{sen}\frac{C}{2}}=\frac{\cos\frac{a+b}{2}}{\cos\frac{c}{2}}$$

25. $$\frac{\cos\frac{A-B}{2}}{\operatorname{sen}\frac{C}{2}}=\frac{\operatorname{sen}\frac{a+b}{2}}{\operatorname{sen}\frac{c}{2}}$$

26. $$\frac{\operatorname{tang}\frac{A+B}{2}}{\cot\frac{C}{2}}=\frac{\cos\frac{a-b}{2}}{\cos\frac{a+b}{2}}$$

27. $$\frac{\operatorname{tang}\frac{A-B}{2}}{\cot\frac{C}{2}}=\frac{\operatorname{sen}\frac{a-b}{2}}{\operatorname{sen}\frac{a+b}{2}}$$

28. $$\frac{\operatorname{tang}\frac{a+b}{2}}{\operatorname{tang}\frac{c}{2}}=\frac{\cos\frac{A-B}{2}}{\cos\frac{A+B}{2}}$$

29. $$\frac{\operatorname{tang}\frac{a-b}{2}}{\operatorname{tang}\frac{c}{2}}=\frac{\operatorname{sen}\frac{A-B}{2}}{\operatorname{sen}\frac{A+B}{2}}$$

LECCION OCTAVA

Resolución de los triángulos esféricos

76. Propiedades de los triángulos esféricos rectángulos — Consideremos un triángulo esférico rectángulo B A C (fig. 35), siendo A el ángulo recto.

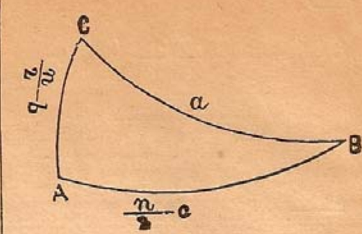


Fig 35

La fórmula (1), siendo A un ángulo recto, se convierte en esta:

$$\cos a=\cos b \cos c \qquad \text{(i)}$$

La (4) queda así:

$$\operatorname{sen} b=\operatorname{sen} a \operatorname{sen} B \qquad \text{(j)}$$

La (5) queda así:

$$\operatorname{sen} c=\operatorname{sen} a \operatorname{sen} C \qquad \text{(k)}$$

La (7) queda así:

$$\operatorname{tang} b=\operatorname{tang} a \cos C \qquad \text{(l)}$$

La (8) queda así:

$$\operatorname{tang} c=\operatorname{tang} a \cos B \qquad \text{(m)}$$

La (9) queda así:

$$\operatorname{tang} b=\operatorname{sen} c \operatorname{tang} B \qquad \text{(n)}$$

La (12) queda así:

$$\operatorname{tang} c=\operatorname{sen} b \operatorname{tang} C \qquad \text{(o)}$$

La (13) queda así:

$$\cos a=\cot B \cot C \qquad \text{(p)}$$

La (14) queda así:

$$\cos B=\cos b \operatorname{sen} C \qquad \text{(q)}$$

La (15) queda así:

$$\cos C=\cos c \operatorname{sen} B \qquad \text{(r)}$$

Todas estas relaciones pueden recordarse fácilmente, por medio de la siguiente

REGLA—*Márquese el lado opuesto al ángulo B con la expresión $\frac{\pi}{2}$—b, y el lado opuesto al ángulo C con la expresión $\frac{\pi}{2}$ — c. Quedan así en el triángulo cinco elementos en este orden: $\frac{\pi}{2}$ — c, B, a, C y $\frac{\pi}{2}$—b. El coseno de uno cualquiera de estos elementos es igual al producto de las cotangentes de los dos elementos adyacentes, o al producto de los senos de los opuestos.*

De acuerdo con esta regla puede deducirse muy sencillamente cualquiera de las fórmulas precedentes.

77. RESOLUCIÓN DE LOS TRIÁNGULOS ESFÉRICOS RECTÁNGULOS— Los triángulos esféricos rectángulos se resuelven por medio de la regla del artículo anterior. Pueden presentarse seis casos.

CASO PRIMERO. *Se dan los lados* b *y* c.

El lodo *a* se obtiene por la fórmula (i) del artículo anterior; el ángulo B sale de la fórmula (n); y el ángulo C sale de la fórmula (o).

CASO SEGUNDO. *Se dan los lados* a *y* b.

El ángulo B sale de la fórmula (j); el lado *c* sale de la fórmula (i); y el ángulo C sale de la fórmula (l).

CASO TERCERO. *Se dan el lado* c *y el ángulo* B.

El lado *b* sale de la fórmula (n); el ángulo C sale de la fórmula (r); y el lado *a* sale de la fórmula (m).

CASO CUARTO. *Se dan el lado* b *y el ángulo* B.

El lado *c* sale de la fórmula (n); el ángulo C sale de la fórmula (q); y el lado *a* sale de la fórmula (j).

CASO QUINTO. *Se dan el lado* a *y el ángulo B.*

El ángulo C sale de la fórmula (p); el lado *c* sale de la fórmula (m); y el lado *b* sale de la fórmula (j).

CASO SEXTO. *Se dan los ángulos* B *y* C.

El lado *a* sale de la fórmula (p); el lado *b* sale de la fórmula (q); y el lado *c* sale de la fórmula (r).

78. RESOLUCIÓN DE TRIÁNGULOS ESFÈRICOS CUALESQUIERA— Se presentan también seis casos.

CASO PRIMERO. *Se dan los tres lados* a, b *y* c.

Se determina el ángulo A por medio de la fórmula (18) del artículo 75; y los ángulos B y C por las análogas.

CASO SEGUNDO. *Se dan los tres ángulos* A, B *y* C.

Se determina el lado *a* por medio de la fórmula (21) del artículo 75; y los lados *b* y *c* por las análogas.

CASO TERCERO. *Se dan los lados* a *y b, y el ángulo* C.

Se determinan los ángulos A y B por medio de las fórmulas (26) y (27) del artículo 75. Esas dos fórmulas dan la semisuma y la semidiferencia de los ángulos; y se puede, por consiguiente, conocer el valor de cada uno de ellos.

El lado *c* se determina después por medio de la fórmula (29).

CASO CUARTO. *Se dan los ángulos* A *y* B, *y el lado* c.

Se determinan los lados *a* y *b* por medio de las fórmulas (28) y (29). Estas dos fórmulas dan la semisuma y la semidiferencia de los lados; y se puede, por consiguiente, conocer el valor de cada uno de ellos.

El ángulo C se determina después por medio de la fórmula (27).

CASO QUINTO. *Se dan los lados* a *y* b, *y el ángulo* A.

El ángulo B se determina por la fórmula (4).

Conocido el ángulo B, se determina el ángulo C por la fórmula (27).

El lado *c* sale de la fórmula (29).

CASO SEXTO. *Se dan los ángulos* A *y* B, *y el lado* a.

El lado *b* sale de la fórmula (4).

El lado *c* se determina después por la fórmula (29).

El ángulo C sale de la fórmula (27).

79. EXPRESIÓN DE UN LADO DE UN TRIÁNGULO ESFÉRICO EN METROS—Representemos por *g* el número de segundos contenidos en un lado de un triángulo esférico, y tratemos de buscar el número *m* de metros de dicho lado.

Llamemos *R* el número de metros que mide el radio de la esfera, y *k* la longitud del arco de un segundo en una circunferencia cuyo radio es igual a la unidad.

Como la longitud de un arco es proporcional a su radio, el arco de un segundo perteneciente a la circunferencia de círculo máximo cuyo radio es R, tendrá por longitud $R\,k$.

Ahora podemos establecer esta proporción:

$$1 : Rk = g : m$$

que se traduce así: *si un arco de un segundo tiene la longitud* R k, *un arco de* g *segundos, ¿qué longitud tendrá?*

$$m = R\,g\,k$$

Pero como el número k es muy pequeño, podemos poner:

$$m = R\,g \text{ sen } 1''$$

Con esta fórmula podemos averiguar a m, conociendo a g, y a g, conociendo a m; para lo cual se hará uso de los logaritmos, de esta manera:

$$\log m = \log R + \log g + \log \text{sen } 1''$$

80. Expresión de la superficie de un triángulo esférico en metros cuadrados.—Por lo visto en el curso de Geometría, la fórmula de la superficie de un triángulo esférico es

$$T = \frac{\frac{1}{2}(A+B+C-\frac{\pi}{2}}{\frac{\pi}{2}} \times \pi R^2$$

que también puede escribirse así:

$$T = \frac{A+B+C-\pi}{D} \times \frac{\pi R^2}{2}$$

llamando D al ángulo recto

Poniendo en lugar de $A+B+C-\pi$ el exceso esférico $2\,S$, tenemos:

$$T = \frac{2S}{D} \times \frac{\pi R^2}{2}$$

Siendo k la longitud del arco de un segundo en la circunferencia cuyo radio es la unidad, se tiene:

$$360^\circ : 2\pi = 1'' : k$$

de donde:

$$k = \frac{\pi}{180}$$

$$k = \frac{\pi}{2D}$$

Reemplazando, se tiene:

$$T = 2\,R^2\,S\,k$$

o bien:

$$T = 2\,R^2\,S \text{ sen } 1''$$

Esta es la expresión de la superficie de un triángulo esférico en metros cuadrados.

LECCION NOVENA

Ejercicios de Trigonometría esférica

81. Problema I—Resolver un triángulo esférico rectángulo, con estos datos: $b = 48^\circ\,24'\,16''$, y $c = 59^\circ\,38'\,27''$.
Respuesta: $a = 70^\circ\,23'\,42''$; $C = 66^\circ\,20'40''$; $B = 52^\circ\,32'\,56''$.

82. Problema II—Resolver un triángulo esférico rectángulo, con estos datos: $a = 86^\circ\,12'\,15''$ y $b = 73^\circ\,4'\,31''$.
Respuesta: $c = 76^\circ\,51'\,20''$: $C = 77^\circ\,24'23''$; $B = 73^\circ\,29'\,40''$.

83. Problema III—Resolver un triángulo esférico rectángulo, con estos datos: $c = 140^\circ\,30'\,57''$, y $B = 111^\circ\,14'\,37''$.
Respuesta: $a = 66^\circ\,15'38''$; $b = 121^\circ\,26'\,25''$; $C = 136^\circ\,0'\,5''$.

84. Problema IV—Resolver un triángulo esférico rectángulo, con estos datos: $b = 40^\circ\,18'\,23''$, y $B = 41^\circ\,4'\,16''$.
Respuesta: $a = 100^\circ\,3'\,7''$; $c = 103^\circ\,13'52''$; $C = 98^\circ\,38'\,53''$.

85. Problemv V—Resolver un triángulo esférico rectángulo, con estos datos: $a = 61^\circ\,3'\,22''$, y $B = 60^\circ\,29'\,20''$.
Respuesta: $b = 49^\circ\,36'\,6''$; $c = 41^\circ\,41'\,32''$; $C = 49^\circ\,28'\,12''$.

86. Problema VI—Resolver un triángulo esférico rectángulo, con estos datos: $B = 90^\circ\,14'\,20''$, y $C = 1^\circ\,21'\,12''$.
Respuesta; $a = 100^\circ\,9'\,52''$; $b = 100^\circ10'13''$; $c = 1^\circ\,19'\,55''$.

87. PROBLEMA VII—Resolver un triángulo esférico cualquiera, con estos datos: $a=70^\circ\ 4'\ 18''$; $b=63^\circ\ 21'\ 27''$, y $c=59^\circ\ 16'\ 23''$.

Respuesta: $A=81^\circ\ 38'\ 20''$; $B=70^\circ\ 9'\ 38''$, y $C=64^\circ\ 46'\ 34''$.

88. PROBLEMA VIII—Resolver un triángulo esférico cualquiera, con estos datos: $A=38^\circ\ 19'\ 18''$; $B=48^\circ\ 0'\ 10''$, y $C=121^\circ\ 8'\ 6''$.

Respuesta: $a=58^\circ\ 24'\ 45''$; $b=60^\circ\ 14'\ 25''$; y $c=89^\circ\ 1'\ 14''$.

89. PROBLEMA IX—Resolver un triángulo esférico cualquiera, con estos datos: $a=36^\circ\ 50'\ 20''$; $b=139^\circ\ 42'\ 30''$, y $C=119^\circ\ 57'\ 16''$, 44.

Respuesta: $c=143^\circ\ 31'\ 7''$, 33; $A=60^\circ\ 53'\ 40''$, y $B=109^\circ\ 32'\ 41''$, 63.

90. PROBLEMA X—Resolver un triángulo esférico cualquiera, con estos datos: $A=60^\circ\ 53'\ 40''$; $B=109^\circ\ 32'\ 41''$, 63, y $c=143^\circ\ 31'\ 7''$, 33.

Respuesta: Este es el mismo triángulo del problema anterior.

91. PROBLEMA XI—Resolver un triángulo esférico cualquiera, con estos datos: $a=36^\circ\ 50'\ 20''$; $b=139^\circ\ 42'\ 30''$, y $A=60^\circ\ 53'\ 40''$.

Respuesta: Es el mismo triángulo del problema anterior.

92. PROBLEMA XII—Resolver un triángulo esférico cualquiera, con estos datos: $A=60^\circ\ 53'\ 40''$; $B=109^\circ\ 32'\ 41{,}63$, y $a=36^\circ\ 50'\ 20''$.

Respuesta: Es el mismo triángulo del problema anterior.

FIN DE LA TRIGONOMETRÍA ESFÉRICA

INDICE-PROGRAMA

ADVERTENCIA—Los números con que están marcadas las proposiciones en este programa corresponden a los que tienen los artículos en el texto

LECCIÓN PRIMERA

Fundamentos de la Trigonometría

1. Objeto y división de la Trigonometría.
2. Casos que ocurren en la resolución de los triángulos rectilíneos.
3. Clasificación de las líneas trigonométricas.
4. Variaciones en los signos de las líneas trigonométricas.
5. Variaciones en los valores de las líneas trigonométricas.
6. Resumen gráfico de las dos cuestiones anteriores.
7. Relaciones entre las líneas trigonométricas de dos arcos que difieren en un número completo de circunferencias.
8. Relaciones entre las líneas trigonométricas de los arcos suplementarios.
9. Relaciones entre las líneas trigonométricas de dos arcos iguales y de signos contrarios.
10. Relaciones entre las líneas trigonométricas de dos arcos que difieren en una semicircunferencia.
11. Relaciones entre las líneas trigonométricas de dos arcos que difieren en un cuadrante.

LECCIÓN SEGUNDA

Fórmulas principales de la Trigonometría rectilínea

12. Fórmulas fundamentales.
13. Seno y coseno en función de la tangente.
14. Seno y coseno de la suma de dos arcos.
15. Seno y coseno de la diferencia de dos arcos.
16. Tangente de la suma de dos arcos.
17. Tangente de la diferencia de dos arcos.
18. Fórmula de *sen* 2 a, *cos* 2 a, *tang* 2 a, *sen* a, *cos* a y *tang* a.
19. Fórmulas de *sen* $\frac{1}{2}$ a, *cos* $\frac{1}{2}$ a y *tang* $\frac{1}{2}$ a.
20. Trasformar en productos la suma y la diferencia de senos y de cosenos.

LECCIÓN TERCERA

Tablas Trigonométricas

21. Un arco muy pequeño difiere muy poco de su seno.
22. El error que se comete tomando la expresión $\left(1-\frac{a^2}{2}\right)$ por valor de *cos* a es menor que $\frac{a^4}{16}$.
24. Construcción de las tablas trigonométricas.
25. Disposición de las tablas.
26. Manejo de las tablas.

LECCIÓN CUARTA

Propiedades de los ángulos rectilíneos

27. Uno de los catetos de un triángulo rectilíneo rectángulo es igual a la hipotenusa multiplicada por el seno del ángulo opuesto al cateto, o por el coseno del ángulo adyacente.
28. Uno de los catetos de un triángulo rectilíneo rectángulo es igual al otro cateto multiplicado por la tangente del ángulo opuesto al primero, o por la cotangente del ángulo adyacente.

29. En todo triángulo rectilíneo, el cuadrado de un lado cualquiera es igual a la suma de los cuadrados de los otros dos lados, menos dos veces el producto de estos dos lados por el coseno del ángulo comprendido entre ellos.
30. En un triángulo rectilíneo cualquiera, los lados son proporcionales a los senos de los ángulos opuestos.
31. Expresión de los ángulos de un triángulo rectilíneo en función de los lados.
32. Diferentes expresiones del área de un triangulo rectilíneo.
33. Formulario de la Trigonometría rectilínea.

LECCIÓN QUINTA

Resolución de los triángulos rectilíneos

34. Resolución de los triángulos rectángulos.
35. Resolución de triángulos cualesquiera.

LECCIÓN SEXTA

Ejercicios de Trigonometría rectilínea

36. Encontrar directamente el seno y el coseno de 45°, 30° y 60°.
37. Calcular la expresión
$$\frac{\text{sen } 60^\circ - \text{sen } 30^\circ}{\text{sen } 60^\circ + \text{sen } 30^\circ}$$
38. Encontrar el ángulo cuya tangente es $\sqrt{2}-1$.
39. Demostrar que
$$\text{sen } a = \frac{2 \text{ tang } \frac{1}{2} a}{1+\text{tang}^2 \frac{1}{2} a}$$
40. Encontrar la superficie de un trapecio en función de sus cuatro lados.
41. Conociendo los lados de un cuadrilátero inscrito, determinar los ángulos.
42. Buscar la relación que existe entre dos lados de un triángulo rectilíneo cualquiera, con los ángulos que forman esos lados con la mediana que párte del vértice del ángulo comprendido por dichos lados.
43. Encontrar el seno y el coseno del arco de 75°.
44. Calcular el ángulo x en la relación
$$\text{tang } x = \text{tang A} + \text{tang B}$$
sabiendo que
$\text{A} = 38^\circ 24' 30''$, y que $\text{B} = 49^\circ 19' 40''$
45. Resolver un triángulo rectilíneo, conociendo un lado, el ángulo opuesto, y la suma o la diferencia de los otros dos lados.
46. Resolver un triángulo rectángulo, conociendo la hipotenusa a y la altura correspondiente h.
47. Resolver la ecuación
$$\text{sen } x + \frac{17}{8} \cos x = -\frac{2}{3}$$
48. Resolver un triángulo isósceles, conociendo la altura h, y el radio r del círculo inscrito.
49. Comprobar que las relaciones iguales
$$\frac{a}{\text{sen A}'} \quad \frac{b}{\text{sen B}'} \quad \frac{c}{\text{sen C}'}$$
representan el diámetro del círculo circunscrito al triángulo.
50. Resolver un triángulo rectángulo con estos datos:
$a = 1254$ metros
$\text{B} = 42^\circ 48'$
51. Resolver un triángulo rectángulo con estos datos:
$b = 852^{\text{m}},02$
$\text{B} = 42^\circ 38'$
52. Resolver un triángulo rectángulo con estos datos:
$a = 397^{\text{m}},70$
$b = 388$ metros
53. Resolver un triángulo rectángulo con estos datos:
$b = 388$ metros
$c = 87^{\text{m}},30$
53. Resolver un triángulo rectilíneo, no rectángulo, con estos datos:
$c = 853^{\text{m}},416$
$\text{A} = 64^\circ 28' 30''$
$\text{B} = 72^\circ 13' 45'',8$
55. Resolver un triángulo rectilíneo, no rectángulo, con estos datos:
$a = 342^{\text{m}}$
$b = 314,97$
$\text{C} = 73^\circ 19' 20''$
56. Resolver un triángulo rectilíneo, no rectángulo, con estos datos:
$a = 853^{\text{m}},416$
$b = 1185,098$
$A = 43^\circ 17' 44'',2$
57. Resolver un triángulo rectilíneo, no rectángulo, con estos datos:
$a = 69$ m.
$b = 78,45.$
$c = 123,53$
58. Medir la altura de una torre cuyo pie es accesible.

59. Medir la altura de una torre cuyo pie es inaccesible.
60. Medir la altura de una montaña.
61. Medir la distancia de un punto accesible a un punto inaccesible.
62. Medir la distancia de dos puntos inaccesibles.
63. Determinar sobre un mapa la posición de un punto P conociendo la posición de tres puntos A, B y C, y los ángulos bajo los cuales se han medido las distancias CA y CB.
64. Determinar el área del cuadrilátero AB CD del artículo 62, con estos datos:

$$\begin{aligned} AB &= 2722^{m},67 \\ DAB &= 54^\circ 18' 13'' \\ CAB &= 41^\circ 23' 48'' \\ ABC &= 83^\circ 15' 24'' \\ ABD &= 37^\circ 23' 55'' \end{aligned}$$

65. Determinar el radio de una torre o recinto circular inaccesible.

LECCIÓN SÉPTIMA

Fórmulas principales de la Trigonometría esférica

66. Definición y propiedades de los triángulos esféricos.
67. Primer grupo de fórmulas.
68. Segundo grupo de fórmulas.
69. Tercer grupo de fórmulas.
70. Cuarto grupo de fórmulas.
71. Expresión de los ángulos de un triángulo esférico en función de los lados.
72. Expresión de los lados de un triángulo esférico en función de los ángulos.
73. Fórmulas de Delambre.
73. Analogías de Neper.
75. Formulario de Trigonometría esférica

LECCIÓN OCTAVA

Resolución de los triángulos esféricos

76. Propiedades de los triángulos esféricos rectángulos.
77. Resolución de los triángulos esféricos rectángulos.
78. Resolución de triángulos esféricos cualesquiera.
79. Expresión de un lado de un triángulo esférico en metros.
80. Expresión de la superficie de un triángulo esférico en metros cuadrados.

LECCIÓN NOVENA

Ejercicios de trigonometría esférica

81. Resolver un triángulo esférico rectángulo, con estos datos: $b=48^\circ 24' 16''$ y $c=59^\circ 38' 27''$.
82. Resolver un triángulo esférico rectángulo, con estos datos: $a=86^\circ 12' 15''$ y $b=73^\circ 4' 71''$.
83. Resolver un triángulo esférico rectángulo, con estos datos: $c=140^\circ 30' 57''$ y $B=111^\circ 14' 37''$.
84. Resolver un triángulo esférico rectángulo, con estos datos: $b=40^\circ 18' 23''$ y $B=41^\circ 4' 16''$.
85. Resolver un triángulo esférico rectángulo, con estos datos: $a=61^\circ 3' 22''$ y $B=60^\circ 29' 20''$.
86. Resolver un triángulo esférico rectángulo, con estos datos: $B=90^\circ 14' 20''$ y $C=1^\circ 21' 12''$.
87. Resolver un triángulo esférico cualquiera, con estos datos: $a=70^\circ 4' 18''$, $b=63^\circ 21'' 27''$ y $c=59^\circ 16' 23''$.
88. Resolver un triángulo esférico cualquiera, con estos datos: $A=38^\circ 19' 18''$, $B=48^\circ 0' 10''$ y $C=121^\circ 8' 6''$.
89. Resolver un triángulo esférico cualquiera, con estos datos: $a=36^\circ 50' 20''$, $b=139^\circ 42' 30''$ y $C=119^\circ 57' 16'',44$.
90. Resolver un triángulo esférico cualquiera, con estos datos: $A=60^\circ 53' 40''$, $B=109^\circ 32' 41'',63$ y $c=143^\circ 31' 7'', 33$.
91. Resolver un triángulo esférico cualquiera, con estos datos: $a=36^\circ 50' 20''$, $b=139^\circ 42' 30''$ y $A=60^\circ 53' 40''$.
92. Resolver un triángulo esférico cualquiera, con estos datos: $A=60^\circ 53' 40''$, $B=109^\circ 32' 41'',63$ y $a=36^\circ 50' 20''$.