

LA MANCHA DE ARAGO

H. J. Castro Restrepo y Z. Jaroszewicz ¹.

Departamento de Física, Universidad Nacional de Colombia, Medellín.

Resumen

Un fenómeno que ocurre a causa del comportamiento difractivo de la luz, representa el fin de la teoría corpuscular y el comienzo de la teoría ondulatoria.

En este trabajo se discute el patrón de difracción que resulta de la propagación de la luz más allá de un obstáculo opaco con simetría de revolución. En el terreno de la Óptica Difractiva ha sido un tópico de controversia desde sus comienzos en el año de 1818 cuando *Simeon Poisson* predijo su existencia en un intento por desacreditar la teoría ondulatoria de la luz propuesta por *Fresnel*. Gracias a *Dominique Arago* quien, llevando a cabo el experimento encontró que la sorprendente predicción era cierta, la teoría de Fresnel dio el golpe certero sobre una base técnica bien fundamentada.

Abstract

In this work, the pattern of diffraction that results of the propagation of light is discussed more than an opaque obstacle with symmetry of revolution. Diffractive optics has been a field of controversy from the beginning in the year 1818 when *Simeon Poisson* predicted its existence on purpose to discredit the ondulatory theory of light proposed by *Fresnel*. Thanks to *Arago*, who carried out the experiment, and found that the surprising prediction was certainly; *FRESNEL'S* theory gave the good act above a well established technical basis.

¹ Miembro de la SPIE.

INTRODUCCIÓN

La mancha de Arago, un punto brillante en el centro de la silueta de un obstáculo circular iluminado con un haz de luz, juega un papel crítico en la investigación científica, en la reflexión de los fenómenos naturales y la fenomenología. La aparición de una mancha brillante justamente en un punto donde no se esperaba, provee pruebas muy convincentes de la naturaleza ondulatoria de la luz. Una descripción matemática del patrón de difracción se obtiene en la región de Fresnel usando la teoría escalar de difracción; y mostrada experimentalmente, no sólo para puntos cercanos al eje dentro de la región de sombra sino también para puntos en los bordes de la sombra de la región directamente iluminada. El tamaño de la mancha brillante central (como las subsecuentes franjas de difracción), la irradiancia axial y la intensidad a lo largo de la mancha geométrica son caracterizados en términos de la ubicación de una fuente plana y de la distancia de propagación más allá del obstáculo opaco con simetría de revolución.

DESARROLLO HISTÓRICO

En 1818, el físico francés AGUSTIN FRESNEL presentó a la *Price essay committee* de la academia francesa una versión improvisada de la construcción de Huygens en que todas las onditas secundarias fueron tenidas en cuenta y que correspondían con la observación experimental. Fresnel proporcionó una técnica para describir la difracción de la luz a través de aberturas y obstáculos circulares. Esta construcción ^[1] es bosquejada en la figura 1, que muestra una onda esférica emergiendo de una apertura circular ^{[2],[3]}. Fresnel definió las zonas circulares sobre el frente de onda de tal manera que cada zona, desde el punto P_0 , es $\lambda/2$ mayor que la zona precedente; es decir, la fase de cada zona sucesiva está en oposición a la onda que le precede ^[3]. En la figura 1, esto significa que,

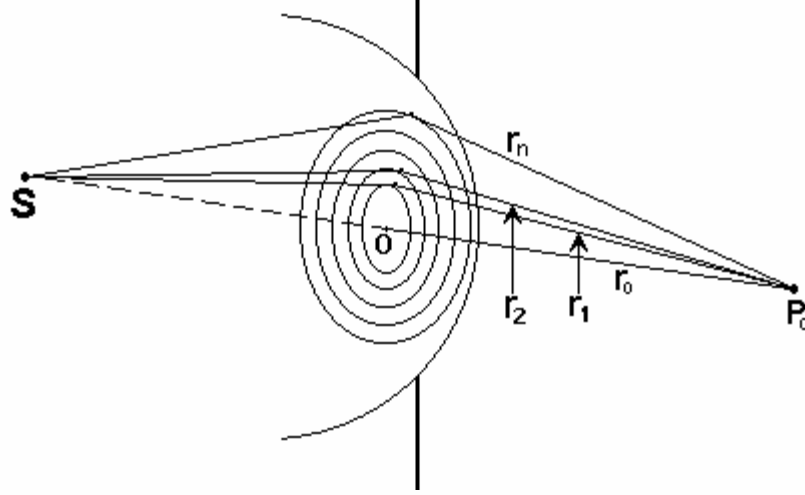


Fig.1. Onda esférica emergiendo de una apertura circular

$$r_N = r_0 + N \frac{\lambda}{2}$$

Se puede mostrar, que la amplitud A_N de la onda en el punto P_0 es el resultado de las N zonas, donde la contribución de cada amplitud A_N , está dada aproximadamente por

$$A_N \approx \frac{a_1}{2} - \frac{a_N}{2}, \text{ cuando } N \text{ es par} \quad (1)$$

$$A_N \approx \frac{a_1}{2} + \frac{a_N}{2}, \text{ cuando } N \text{ es impar} \quad (2)$$

Simeon Poisson, que en ese entonces era miembro del comité junto con *Pierre Laplace*, *Jean B. Biot*, *Dominique F. Arago* y *Joseph L. Gay-Lussac*, dedujo una conclusión notable y aparentemente improbable de la teoría de difracción de Fresnel. Demostró que en el centro de la sombra de un obstáculo opaco circular sería visible un punto brillante; un resultado que él consideraba iba en contravía con el tratamiento de Fresnel. Poisson consideró que si un obstáculo circular cubre justamente la primera zona en el lugar de la apertura, entonces las contribuciones de luz de todas las otras zonas adyacentes, excepto la primera tienden al punto P_0 ; esto es, la amplitud $a_2/2$ debería tender a P_0 . Por consiguiente, en el centro de la silueta del obstáculo debería obtenerse iluminación

ligeramente menor o tan intensa como si el obstáculo no estuviera presente ^{[1],[4]}. Este presagio sorprendente manifestado por Poisson para demeritar la teoría ondulatoria de la luz, fue posteriormente verificada por Arago, quien efectivamente observó que el punto brillante en realidad existía.

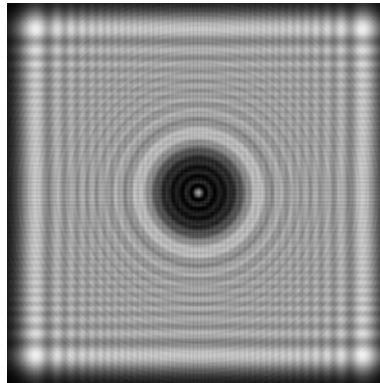


Fig. 2. La mancha de Arago. Patrón de difracción producido por un obstáculo circular de radio 0,05 mm, iluminado con una onda plana de longitud igual a 0,0006328 mm, simulado por computadora. Las ondas de borde representan un efecto numérico debido al tamaño de la ventana de difracción.

Es importante mencionar que la mancha de Arago fue observada un siglo antes por *Delisle* en 1715 y *Maraldi* en 1723, pero sus descubrimientos no atrajeron la atención debido probablemente a la falta de una explicación teórica, en esa época, del fenómeno de difracción de la luz ^[5].

Así, la objeción de Poisson, confirmada experimentalmente por Arago, eventualmente sirvió para demostrar la teoría de la difracción de Fresnel. En la actualidad es completamente irónico que lo que primero observaron Delisle y Maraldi, que Poisson simplemente predijo y Arago redescubrió sea ahora conocido también como la *mancha de Poisson*.

DIFRACCIÓN POR OBSTÁCULOS CIRCULARES. El tratamiento teórico

La propagación de una onda de luz es a veces considerada en términos de diminutos generadores posicionados a lo largo de un frente de onda en algún instante dado. Esos generadores, los cuales son meramente

invenciones matemáticas, emiten fuertemente hacia adelante pequeñas ondas de luz (en la dirección de propagación), menos fuerte hacia los lados y poco o nada hacia atrás. Pero, aunque los generadores y sus ondas no existen, son ayudas físicas valiosas para ilustrar muchos aspectos de la naturaleza ondulatoria de la luz.

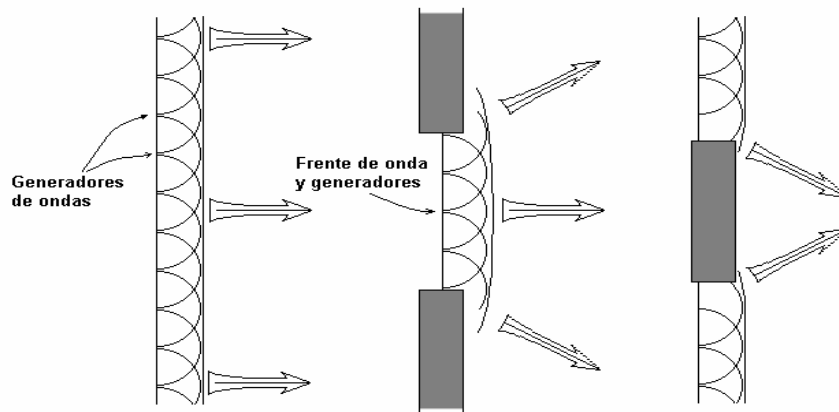


Fig. 3. Propagación de un frente de onda: (a). Difracción por una rendija.
(b). Difracción por un disco.

Un ejemplo importante es la difracción de la luz por una abertura estrecha (de ancho como el filo de una cuchilla de afeitar) en una pantalla opaca, figura 3 (a).

Cuando el frente de onda atraviesa la abertura, en lugar de viajar a lo largo de una línea recta a través de la abertura vertical, la luz se esparce horizontalmente al frente de ella. La expansión en el patrón de zonas brillantes y oscuras, depende del tamaño de la rendija o de la abertura. Si la abertura es rectangular y la longitud del lado es vertical la configuración crea un buen patrón extendido horizontalmente y comprimido verticalmente. Un patrón así es llamado el patrón de difracción de la abertura.

Si se reemplaza el disco por un objeto excepcionalmente redondo, pequeño y liso (un balón), figura 4, entonces el aspecto es un patrón brillante o *mancha de Arago*. Esta es una consecuencia de la difracción de la luz alrededor de los bordes del mismo. La luz que llega al centro de la sombra proveniente de un borde del balón viaja justamente la misma distancia que

la luz proveniente del borde opuesto. De esta manera, todas las contribuciones de los bordes del balón llegan en fase a la pantalla e interfieren constructivamente produciendo el punto brillante.

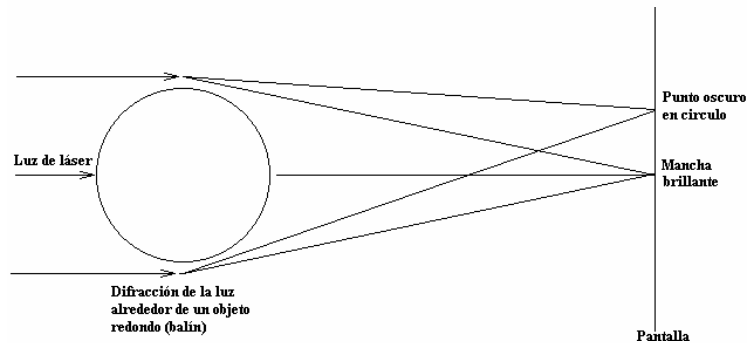


Fig. 4. Obstáculo circular iluminado frontalmente con una onda plana.

Rodeando la *mancha* se encuentra un círculo oscuro, creado por interferencia destructiva. El punto es oscuro porque la luz que llega desde un borde del balón viaja una distancia mayor que la luz proveniente del borde directamente opuesto. La diferencia de camino óptico de las dos ondas de luz las colocan fuera de fase y esto hace que lleguen a la pantalla interfiriendo destructivamente.

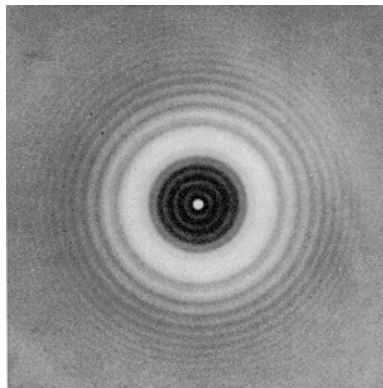


Fig. 5. Patrón de difracción formado por un objeto redondo.

Ligeramente más lejos del anterior círculo oscuro se encuentra otro círculo brillante el cual es producido por interferencia constructiva. De nuevo, la

luz que llega de un borde del balín viaja una distancia mayor que la luz que proviene del borde directamente opuesto; pero esta vez, la diferencia de tiempo retrocede la onda haciéndola llegar en fase; es decir, la onda viaja más despacio detrás de la otra una longitud de onda (λ). Usualmente, unos pocos círculos brillantes y oscuros pueden ser observados alrededor de la mancha ^[6].

OBSTÁCULOS CIRCULARES. El tratamiento matemático

Consideremos una pantalla en forma de disco y sean p y p' dos puntos situados en la perpendicular que pasa por el centro del disco. La apertura de difracción consiste de la totalidad exterior del disco $a < x < \infty$, donde a es el radio del disco (figura 6). Entonces la fórmula de difracción de Rayleigh-Sommerfeld ^{[4],[7]} se convierte en:

$$U(P) = \frac{A}{i\lambda} \int_a^\infty \frac{\exp[ik(r+r')]}{r r'} \cos(\vec{n}, \vec{r}) 2\pi x dx \quad (3)$$

Para propósitos de una aplicación posterior, sea $p' = p$ y $r' = r$, lo cual simplificaría la evaluación de la integral. Además, si consideramos una onda plana incidente ($r' \rightarrow \infty$), en lugar de una onda esférica, entonces (ver figura 6)

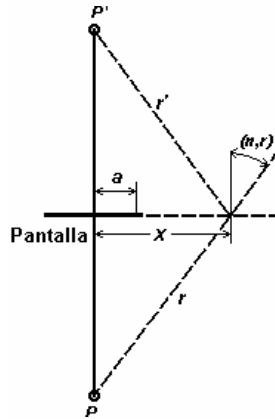


Fig. 6. Difracción por un disco

$$r^2 = p^2 + x^2, \quad x dx = r dr \quad \text{y} \quad \cos(\vec{n}, \vec{r}) = \frac{p}{r}$$

Por consiguiente, de acuerdo con la ecuación (3), tenemos:

Y, mediante un proceso de integración por partes, la solución contiene el factor $1/2ikr^n$, que tiende a cero (o) cuando $n \rightarrow \infty$. Por consiguiente, de la

$$U(P) = \frac{2\pi A p}{i\lambda} \int_{\sqrt{p^2+a^2}}^{\infty} \frac{\exp(2ikr)}{r^2} dr \quad (4)$$

expresión (4) se obtiene

$$U(P) = \frac{2\pi A p}{2\lambda k} \left\{ \frac{\exp\left[2ik\sqrt{p^2+a^2}\right]}{p^2+a^2} \right\} \quad (5)$$

Si introducimos la siguiente notación para la primera excitación en el borde del disco

$$U(P) = \frac{2\pi A p}{2\lambda k} \left\{ \frac{\exp\left[2ik\sqrt{p^2+a^2}\right]}{p^2+a^2} \right\} \quad (6)$$

Además, como $k = 2\pi/\lambda$, la ecuación (6) se convierte en,

$$U(P) = \frac{1}{2} \frac{p}{\sqrt{p^2+a^2}} \exp\left(ik\sqrt{p^2+a^2}\right) U(p') \quad (7)$$

Escribiendo la ecuación (7) en términos de las intensidades $I = |\mathbf{u}(p)|^2$, $I_0 = |\mathbf{u}(p')|^2$, se obtiene:

Esto significa que: *La intensidad final de la perturbación óptica en el punto de observación p , es la cuarta parte de la intensidad inicial.*

$$I = \left(\frac{1}{4} \frac{p^2}{p^2+a^2} \right) I_0 \quad (8)$$

Este resultado paradójico está representado gráficamente en la figura (7). *No hay oscuridad en ninguna parte a lo largo del eje central perpendicular detrás del disco circular opaco (excepto inmediatamente detrás del disco).*

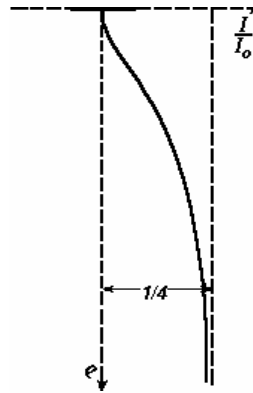


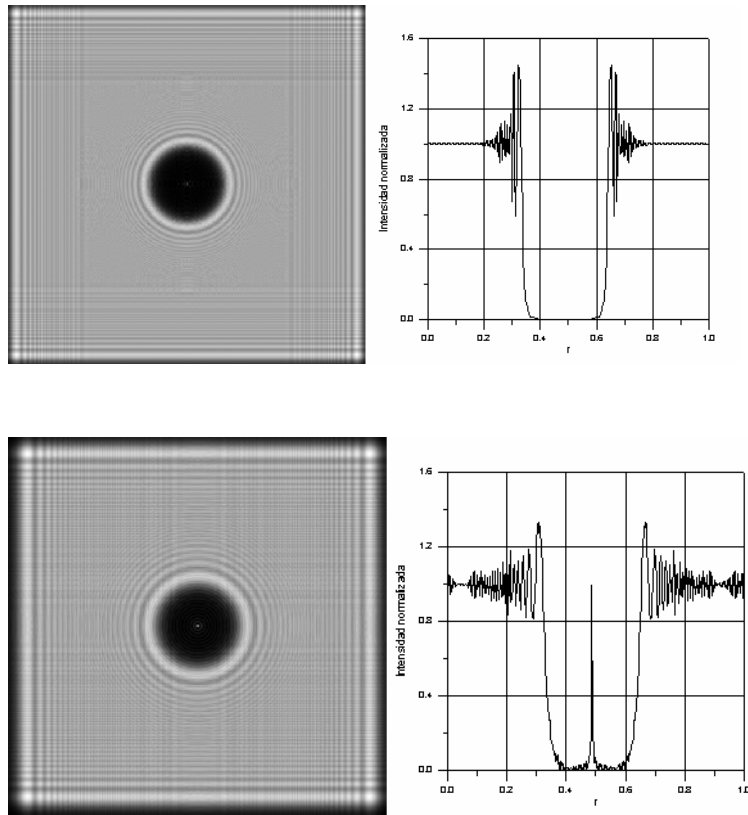
Fig. 7. Intensidad relativa de la luz I / I_0 a lo largo del eje detrás de un disco circular.

La intensidad relativa se incrementa cuando se aumenta la distancia entre la fuente de luz y el punto de observación. Para grandes distancias la intensidad en el punto de observación tiende a la cuarta parte de la intensidad en el borde del disco. Ahora bien, si iluminamos el disco con una onda plana ($r' \rightarrow \infty$), entonces el factor $1/4$ en la ecuación (8) desaparece. Por consiguiente $I \rightarrow I_0$ cuando $r \rightarrow \infty$. En distancias suficientemente grandes el disco no puede ser visto ya que la onda de luz incidente no es perturbada. La onda de luz primaria pasa alrededor del borde del disco a lo largo de toda su circunferencia, porque por simetría las ondas llegan con igual fase a lo largo del eje central perpendicular al disco. Este resultado se encuentra con una impresionante contradicción con las trayectorias rectilíneas de rayos postulado por la óptica geométrica. Notamos, sin embargo, que la intensidad dada por la ecuación (8) no siempre es esperada en la vecindad inmediata del eje central perpendicular, porque allí solamente las líneas $p = \text{constante}$ coincide con el borde del disco. En distancias cortas de la línea central la sombra completa predicha por la teoría de Fresnel sería observada.

Poisson predijo la brillantez a lo largo del eje como una consecuencia de la teoría de la sombra de Fresnel y la citó como una objeción a tal teoría. Este fenómeno también llamado *difracción de Poisson* ocurre tanto detrás

de una esfera opaca como detrás de un disco circular. Para que el punto de Poisson (mancha de Arago) se pueda observar fácilmente, el obstáculo debe ser suave y poseer simetría circular ^[7].

A continuación se muestra como evoluciona la mancha de Arago a lo largo del eje óptico para un objeto con simetría circular de radio 0,05 mm, cuando es iluminado frontalmente con una onda plana.



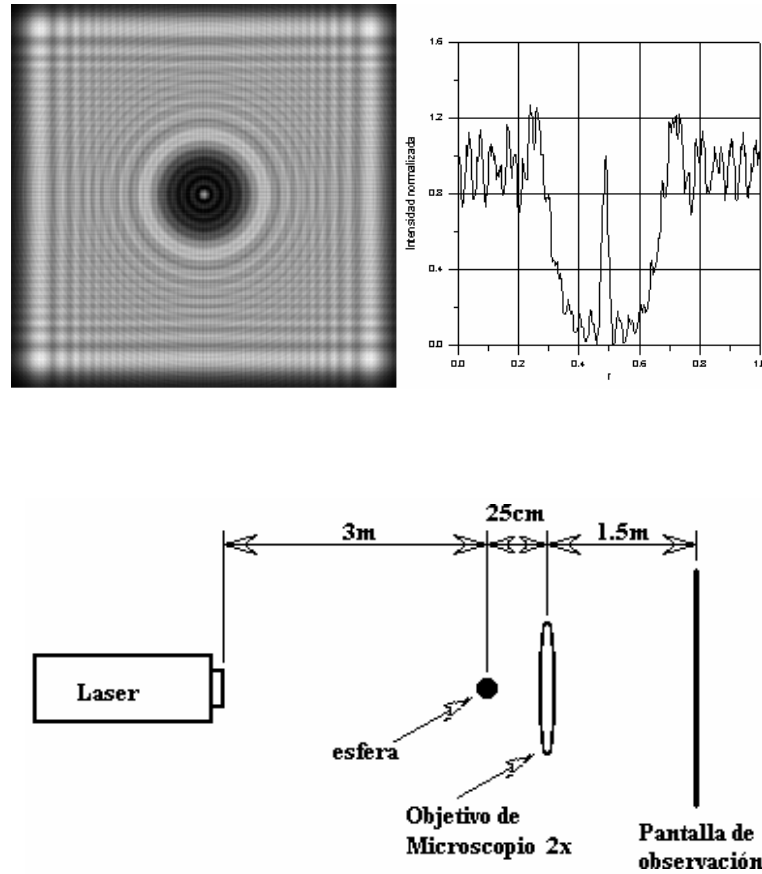


Fig. 8. Un montaje para observar la mancha de Arago ^[1].

APLICACIONES

Si tenemos en cuenta que un **axicón** es una figura de revolución que produce la imagen de una fuente puntual en un rango de puntos a lo largo de su eje (J. McLeod, 1954), entonces los elementos ópticos que posean esta característica con excepción de las lentes ideales pueden ser considerados como tales. El ejemplo más conocido es indudablemente un *axicón lineal*, esto es, un espejo cónico; además, los haces besselianos, los axicones logarítmicos y las lentes con aberración esférica, las aberturas anulares estrechas y la mancha de Arago, entre otros. Su importancia característica radica en la formación de imágenes con gran profundidad de foco (un microscopio especial con un axicón de objetivo fue propuesto para observar las trayectorias de partículas en una espesa capa de

emulsión). Son aplicables en interferometría y en metrología. Como elementos que definen una línea de referencia con alta precisión sirven para alinear sistemas ópticos; para detectar la dispersión de la luz en el centro de un pequeño punto iluminado y para chequear la lisura de una superficie.

En el diseño de axicones y en el análisis de su campo difractivo se tiene en cuenta lo que sucede a lo largo del segmento focal; es decir, la intensidad axial a lo largo del segmento focal y la energía que fluye directamente en las vecindades del eje óptico es constante; las oscilaciones de intensidad axial que aparecen debido a los efectos de difracción en los bordes de la apertura son eliminados; para algunas aplicaciones se requiere el valor de intensidad cero en el centro del segmento focal en lugar de un máximo (llamado segmento focal oscuro); el pico central del segmento focal es lo más estrecho posible; la eficiencia de energía recolectada en el centro del patrón focal es alto ^[5].

CONCLUSIÓN

A lo largo del presente trabajo se discute el patrón de difracción que resulta de la propagación de la luz más allá de una abertura o un obstáculo opaco de sección circular usando la teoría escalar de Kirchhoff, la formulación de Rayleigh-Sommerfeld e invocando la aproximación de Fresnel ^{[4],[8]}. La solución se aplica observando puntos en ambas partes, dentro y más allá de la región de Fresnel, en la región de sombra y en la región iluminada. Una descripción matemática del patrón de difracción se obtiene en la región de Fresnel ^[8], derivando sus características particulares, tales como los radios de la mancha brillante central, la estructura circundante de los anillos de difracción, la intensidad a lo largo de los ejes y la sombra geométrica. En resumen, la convergencia de la fórmula de difracción permite un uso bastante eficiente de los cálculos para comparar entre los resultados teóricos y los datos experimentales.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

1. HARRISON, M., E., MAREK, C., T., and WHITE, J., *Rediscovering Poisson's Spot.*, The Physics Teacher, vol. 35., 18,19, 1997.
2. STRONG, J., *Concepts of Classical Optics*, Freeman, San Francisco., 181-186, 1958.
3. PEDROTTI, F., and PEDROTTI, L., *Introduction to Optics*, 2nd ed., Prentice Hall, New Jersey., 370, 1993.
4. GOODMAN, J. W., *Introduction to Fourier Optics.*, Mc. Graw Hill, Nueva York., 30-48, 1968.
5. JAROSZEWICZ, Z., *Axicons Design and propagation properties.*, vol 5. Polish Chapter of SPIE., Warsaw., 7., 1997
6. WALKER, J., *The amateur scientist.*, Am., J., Physics, vol. 44., 154-161, 1976.
7. SOMMERFELD, A., *Optics*, Academic Press, Nueva York., 213-219, 1964.
8. GARY, E., SOMMARGREN, and H., JOSEPH, WEAVER., *Diffraction of light by an opaque sphere. 1: Description an properties of the diffraction pattern.*, Applied Optics, vol. 29, N° 31., 1990.