

MÉTODO PARA ELABORAR UN PROGRAMA DE CÓMPUTO ÚTIL PARA EL CÁLCULO RÁPIDO DE LA DISPERSIÓN MIE APLICABLE EN PARTICULAR A LA TÉCNICA LIDAR

A. Bastidas^a, M. Jaramillo^b y E. Solarte^c

^a Departamento de Física. Universidad del Cauca. Popayán. Colombia

^b Departamento de Ciencias Básicas. Pontificia Universidad Javeriana.
Cali. Colombia

^c Departamento de Física. Universidad del Valle. Cali. Colombia

Resumen

A partir de la teoría de dispersión de la radiación electromagnética producida por partículas esféricas (dispersión Mie), se tratará una particular aplicación al cálculo del tamaño de partículas con el objetivo de interpretar y simular la señal de un sistema lidar.

Palabras Claves: Scattering, Dispersión Mie, función de Bessel, eficiencia de extinción, radiación difusa.

Abstract

We apply the theory of scattering of electromagnetic radiation by spherical particles (Mie scattering) to the calculation of particle size, in order to interpret and simulate the signal of a lidar system.

INTRODUCCIÓN

La dispersión de MIE ocurre cuando las partículas son comparables o más grandes que la longitud de onda de la luz (por ejemplo, partículas de aerosol y pequeñas gotas de agua). En 1908, Gustav Mie publicó una solución rigurosa del problema de dispersión de luz por partículas esféricas homogéneas de tamaño comparable con λ ^[1]. La teoría de Mie presenta una solución en la cual se tiene en cuenta el tamaño de las partículas, pero también su índice de refracción y el del medio que las rodea, y asimismo, su forma, constante dieléctrica, y absorptividad.

La retrodispersión lidar se presenta en la radiación difusa producida por los constituyentes de la atmósfera^[2]. En un ejemplo típico, que se realizará en los cálculos de este trabajo, se considera un lidar que opera a 532 nm, con pulsos de 300 mJ de energía, 20 ns de duración y hasta 100 Hz de repetición. Generalmente, para este tipo de sistemas, la radiación dispersada es colectada por un telescopio y luego focalizada en una fibra óptica y llevada a un fotomultiplicador seguido de un sistema de adquisición de datos. Se considera que el proceso de interacción entre la radiación láser y los constituyentes atmosféricos, considerados como partículas esféricas, de una sola capa es de difusión simple y con muy bajo nivel de cristalización. Estas condiciones de trabajo garantizan que la depolarización de la radiación láser que pueda producirse, no introduzca errores en el proceso de inversión. Además se requiere una buena relación de señal a ruido; todos estos procesos son tenidos en cuenta en la ecuación básica del lidar.

$$W_r(R) = W_0 \left(\frac{cT}{2} \right) \beta(R) A_r R^{-2} \exp \left[-2 \int_0^R \alpha(r) dr \right] \quad (1)$$

Donde, W_r es la potencia instantánea recibida en el tiempo t , W_0 es la potencia transmitida en el tiempo t_0 . c es la velocidad de la luz en el aire, T es la duración del pulso, β es el coeficiente de dispersión del volumen de la atmósfera, R es el radio de acción, A_r es el área efectiva del receptor, y α es el coeficiente de extinción del volumen de la atmósfera, definido como la sección transversal por unidad de volumen, y es numéricamente idéntico al coeficiente de extinción lineal usado en las ecuaciones de transmisión de luz láser. Los coeficientes β y α contienen la información sobre las partículas dispersoras y provienen fundamentalmente de dispersión Mie. Así pues, es posible obtener alguna información de estos constituyentes atmosféricos (como aerosoles), a partir de los diagramas de dispersión originados del cálculo numérico de los parámetros relacionados directamente con la dispersión Mie. Dicho cálculo numérico se realiza mediante un programa en MATLAB que se caracteriza por su rapidez y versatilidad para propósitos de simulación de la señal recibida por un lidar^[3].

MODELO

En el presente trabajo se considera la dispersión elástica de la radiación electromagnética producida por partículas que tienen forma esférica. Como se muestra esquématicamente en la figura 1.

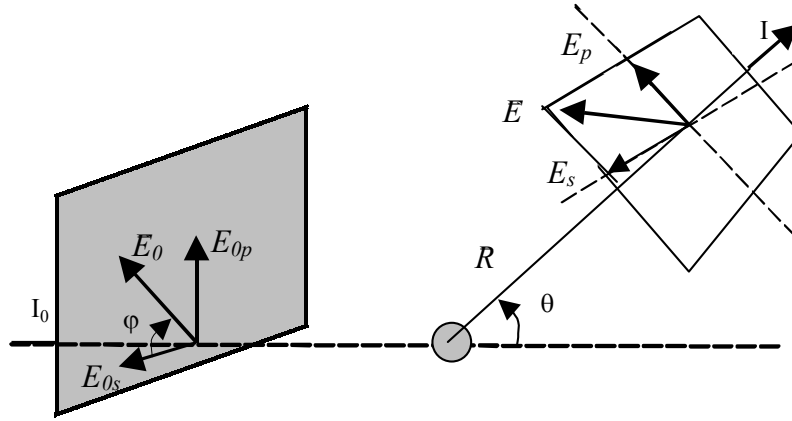


Figura 1. Esquema de la dispersión de radiación por un objeto esférico

Para este caso, la matriz de transformación del campo eléctrico de la radiación de incidente a difuso, tiene la forma^[4]:

$$\begin{bmatrix} E_s(\theta) \\ E_p(\theta) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_I(\theta) & 0 \\ 0 & S_2(\theta) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_{0s} \\ E_{0p} \end{bmatrix} \frac{I}{ikR} \exp[i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{R})] \quad (2)$$

donde E_p y E_s son las componentes del campo difuso paralelo y perpendicular respectivamente al plano de dispersión, idénticamente E_{0p} y E_{0s} para el campo incidente. $\vec{R}$ es el vector desde el centro de dispersión hasta el punto de observación. La luz se considera polarizada linealmente.

Los términos S_I y S_2 se obtienen a partir de las siguientes expresiones:

$$S_I = \sum_l \frac{(2n+1)}{n(n+1)} \left[a_n \pi_n(\cos \theta) + b_n \tau_n(\cos \theta) \right] \quad (3)$$

$$S_2 = \sum_l \frac{(2n+1)}{l(n+1)} \left[b_n \pi_n(\cos \theta) + a_n \tau_n(\cos \theta) \right] \quad (4)$$

θ es el ángulo de dispersión, a_n y b_n son los términos radiales originados por la separación de variables radial y angular del campo difuso, mientras τ_n y π_n son los términos dependientes de la variable angular θ .

- El cálculo de los términos angulares τ_n y π_n se realiza mediante los polinomios de Legendre:

$$\tau_n = P'_n \quad (5)$$

$$\pi_n = (\cos \theta) P'_n - (\sin^2 \theta) P''_n \quad (6)$$

donde P_n , P'_n , P''_n son los polinomios de Legendre respecto a la variable $\cos \theta$ y sus derivadas. Estos polinomios se pueden obtener utilizando la regla de derivación y de recurrencia a partir de P_{n-1} , P_{n-2} , P'_{n-1} , P''_{n-1} , de la siguiente forma:

$$P_n = \frac{1}{n} \left[(2n-1)(\cos \theta) P_{n-1} - (n-1) P_{n-2} \right] \quad (7)$$

$$P'_n = \frac{1}{\cos \theta} \left(n P_n + P'_{n-1} \right) \quad \text{ó} \quad P'_n = n P_{n-1} + P'_{n-1} \cos \theta \quad (8)$$

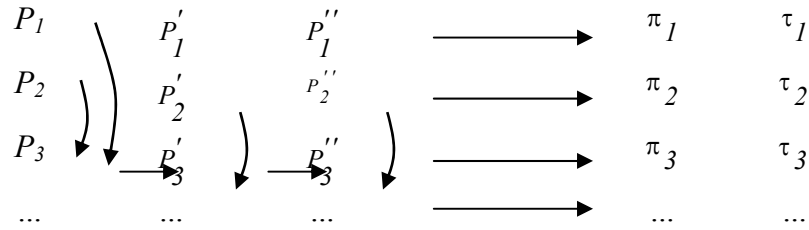
$$P''_n = \frac{1}{\cos \theta} \left[(n-1) P'_n + P''_{n-1} \right] \quad \text{ó} \quad P''_n = (n+1) P'_{n-1} + P''_{n-1} \cos \theta \quad (9)$$

Para el caso del cálculo de la serie S_1 y S_2 es conveniente el cálculo recursivo de los términos τ_n y π_n (y por lo tanto de P_n , P'_n , P''_n) a partir del primer polinomio de Legendre y su respectiva derivada:

$$P_1 = \cos\theta ; P_1' = 1 ; P_1'' = 0 \quad (10)$$

$$P_2 = \frac{1}{2}(3\cos^2\theta - 1) ; P_2' = 3\cos\theta ; P_2'' = 3 \quad (11)$$

El cálculo de términos sucesivos lo realiza el programa de computo fundamentado en el siguiente esquema:



- Según la teoría de dispersión Mie, a_n y b_n se calculan mediante las funciones de Bessel, J_n y Y_n de orden n , el cual puede ser semientero:

$$a_n = \frac{\psi_n'(y)\psi_n(x) - m\psi_n(y)\psi_n'(x)}{\psi_n'(y)\xi_n(x) - m\psi_n(y)\xi_n'(x)} \quad (12)$$

$$b_n = \frac{m\psi_n'(y)\psi_n(x) - \psi_n(y)\psi_n'(x)}{m\psi_n'(y)\xi_n(x) - \psi_n(y)\xi_n'(x)} \quad (13)$$

donde los parámetros están definidos de la siguiente forma:

m = índice de refracción complejo de las partículas respecto al medio externo.

λ = longitud de onda de la luz incidente.

$x = \frac{2\pi r}{\lambda}$ = parámetro de tamaño, r es el radio de la partícula.

$y = mx$

Las funciones que aparecen en las ecuaciones 12 y 13 se definen en términos de las funciones de Bessel como:

$$\psi_n(z) = \left(\frac{\pi z}{2}\right)^{\frac{I}{2}} J_{n+\frac{I}{2}}(z) \quad (14)$$

$$\psi'_n(z) = \frac{\pi}{4} \left(\frac{\pi z}{2}\right)^{-\frac{I}{2}} J_{n+\frac{I}{2}}(z) + \frac{I}{2} \left(\frac{\pi z}{2}\right)^{-\frac{I}{2}} \left[J_{n-\frac{I}{2}}(z) - J_{n+\frac{3}{2}}(z) \right] \quad (15)$$

$$\xi_n(z) = \left(\frac{\pi z}{2}\right)^{\frac{I}{2}} \left[J_{n+\frac{I}{2}}(z) - i Y_{n+\frac{I}{2}}(z) \right] \quad (16)$$

$$\begin{aligned} \xi'_n(z) = & \frac{\pi}{4} \left(\frac{\pi z}{2}\right)^{-\frac{I}{2}} \left[J_{n+\frac{I}{2}}(z) - i Y_{n+\frac{I}{2}}(z) \right] + \frac{I}{2} \left(\frac{\pi z}{2}\right)^{\frac{I}{2}} \\ & \left[J_{n-\frac{I}{2}}(z) - J_{n+\frac{3}{2}}(z) - i \left(Y_{n-\frac{I}{2}}(z) - Y_{n+\frac{3}{2}}(z) \right) \right] \end{aligned} \quad (17)$$

Donde Y_n y J_n son las funciones de Bessel de primera y segunda especie de orden semientero. El cálculo de los términos a_n y b_n se basa en el cálculo recursivo de la función de Bessel a partir de la función de orden inferior:

$$J_{\frac{I}{2}}(z) = \left(\frac{\pi z}{2}\right)^{-\frac{I}{2}} \text{senz} \quad J_{\frac{3}{2}}(z) = \left(\frac{\pi z}{2}\right)^{-\frac{I}{2}} \left[\frac{\text{senz}}{z} - \cos z \right] \quad (18)$$

$$J_{-\frac{I}{2}}(z) = \left(\frac{\pi z}{2}\right)^{-\frac{I}{2}} \cos z \quad J_{-\frac{3}{2}}(z) = \left(\frac{\pi z}{2}\right)^{-\frac{I}{2}} \left[\frac{\cos z}{z} + \text{senz} \right] \quad (19)$$

$$Y_{\frac{I}{2}}(z) = -J_{-\frac{I}{2}}(z) \quad Y_{\frac{3}{2}}(z) = J_{-\frac{3}{2}}(z) \quad (20)$$

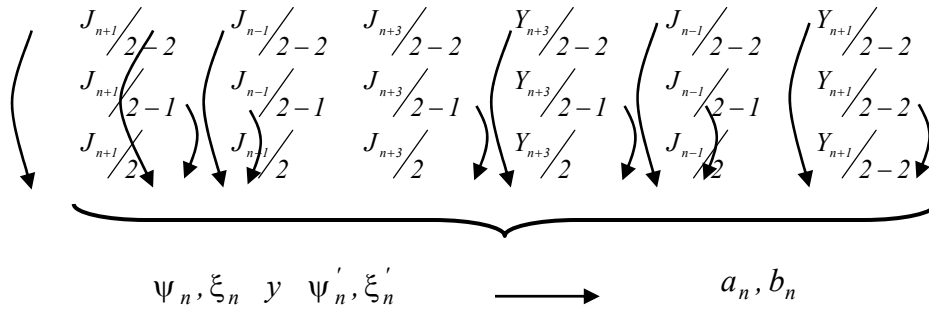
$$Y_{-\frac{3}{2}}(z) = -J_{\frac{3}{2}}(z) \quad Y_{-\frac{I}{2}}(z) = J_{\frac{I}{2}}(z) \quad (21)$$

El cálculo sucesivo de las funciones de Bessel de orden n se basa en las habituales relaciones de recurrencia:

$$J_n(z) = \frac{2(n-1)}{z} J_{n-1}(z) - J_{n-2}(z) \quad (22)$$

$$Y_n(z) = \frac{2(n-1)}{z} Y_{n-1}(z) - Y_{n-2}(z) \quad (23)$$

para lo cual se utiliza el siguiente esquema:



CÁLCULO DE ALGUNOS PARÁMETROS LIGADOS A LA DISPERSIÓN MIE

1. **Sección eficaz de dispersión.** Si el ángulo φ es formado por la luz incidente polarizada linealmente con el plano de dispersión, (Ver Figura 1) la sección eficaz de dispersión se calcula mediante la expresión:

$$\beta(\theta, \varphi) = \frac{I}{k^2} \left[|S_1(\theta)|^2 \cos^2(\varphi) + |S_2(\theta)|^2 \sin^2(\varphi) \right] \quad (24)$$

- De este resultado se encuentra la eficiencia de dispersión definida por la expresión:

$$Q_{ba}(\theta, \varphi) = \frac{16\pi^2}{(x\lambda)^2} \beta(\theta, \varphi) \quad (25)$$

2. Sección eficaz de extinción por dispersión. Conocidos los coeficientes a_n y b_n , la sección eficaz de extinción se expresa mediante la relación:

$$\sigma_{sc} = \left(\frac{\lambda^2}{2\pi} \right) \sum_l (2l+1) \left[|a_l|^2 + |b_l|^2 \right] \quad (26)$$

- De este resultado se calcula la eficiencia de extinción definida por la expresión:

$$Q_{sca} = \frac{4\pi}{(x\lambda)^2} \sigma_{sc} \quad (27)$$

3. Sección eficaz de extinción por dispersión más absorción. Finalmente, la sección eficaz debida a dispersión y absorción se encuentra mediante la relación:

$$\sigma_{ext} = \left(\frac{\lambda^2}{2\pi} \right) \sum_l (2l+1) \Re(a_l + b_l) \quad (28)$$

- De esta última se obtiene la eficiencia de extinción total, dada por la expresión:

$$Q_{ext} = \left(\frac{1}{\pi r^2} \right) \sigma_{ext} \quad (29)$$

RESULTADOS

En la retrodispersión lidar es normal observar la radiación difusa producida por las partículas atmosféricas para un ángulo $\theta = 180^\circ$. Es posible obtener alguna información sobre el diagrama de radiación de un núcleo de dispersión observado mediante la medida del coeficiente de extinción total de tales partículas, (aerosoles). Tal reporte indica la asimetría del lóbulo de radiación difusa. El formalismo utilizado para este reporte es:

$$R = \frac{\sigma_{ext}}{\beta(180^\circ)} \quad (30)$$

Se ha elaborado el programa para el cálculo numérico de estos parámetros, de acuerdo con las líneas generales establecidas anteriormente y con él es posible reproducir el diagrama de radiación de dispersión teniendo en cuenta el tamaño de las partículas.

De esta forma se dispone de una herramienta que permite el cálculo rápido de los tamaños de partículas para una sucesión de valores del parámetro de tamaño o del radio de la partícula; requiere como datos de entrada: la longitud de onda, el índice de refracción complejo, el intervalo de valores del parámetro de tamaño, x , y el paso relativo dx .

El programa permite analizar los diagramas de dispersión que muestran claramente la dependencia con el tamaño de las partículas dispersoras. En las figuras 2 y 3 se muestran algunos resultados para el caso particular de gotas de agua de diferente tamaño, con índice de refracción: $n=1,33+0i$.

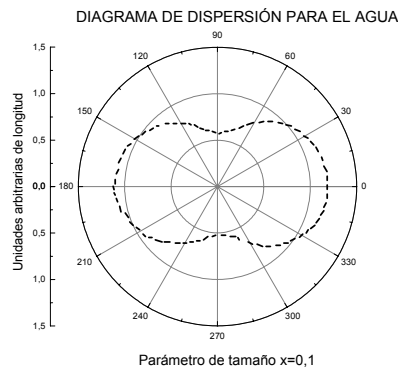


Figura 2. Diagrama de dispersión para una gota de agua con parámetro de tamaño 0.1

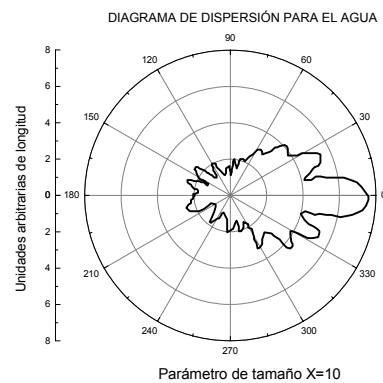


Figura 3. Diagrama de dispersión para una gota de agua con parámetro de tamaño 10

CONCLUSIONES

Este método ha permitido elaborar un programa de computo utilizando las subrutinas de MATLAB referentes a las funciones de Bessel, donde se pueden realizar los cálculos de los parámetros ópticos antes mencionados de partículas dispersoras de radiación electromagnética, de una forma muy rápida comparada con los programas en FORTRAN ya existentes. El programa permite además visualizar el diagrama de dispersión útil para la comparación de tamaños de partículas y es perfectamente ajustable a modificaciones sugeridas por el modelo teórico, teniendo en cuenta la ecuación del lidar y su respectivo proceso de inversión.

REFERENCIAS

- [1] R. G. Newton, en: Scattering theory of waves and particles, McGraw-Hill, 1966.
- [2] C. Werner, Lidar Techniques for Remote Sensing, en: Proceedings Europto Series, Vol. 2310, 1994, p. 860.
- [3] M. Del Guasta, S. Balestri, F. Castagnoli, L. Stefanutti, A. Barbaro, en: Integration of backscattering-LIDAR and ground-based meteorological and pollution data in Florence (Italy), Proceedings Europto Series, Vol. 3104, 1997, p. 456.
- [4] M. Del Guasta, M. Morandi and L. Stefanutti, en: One year of cloud lidar data from Dumont d'Urville (Antartica). General overview of geometrical and optical properties, Journal of Geophysical Research, Vol. 98. No. D10, 1993. p. 18.