

OPTICA FRACCIONAL DE FOURIER

Cesar O. Torres*, Yezid Torres y Pierre Pellat-Finet **.

Grupo de Optica y Tratamiento de Señales
Universidad Industrial de Santander

*Dirección permanente Laboratorio de Optica e Informática LOI
Universidad Popular del Cesar

** Universite de Bretagne Sud. Lorient France

Resumen

Se muestran las aplicaciones más relevantes de la transformada fraccional de Fourier en el campo de la óptica y sus potencialidades frente al procesado y tratamiento digital de imágenes, el artículo comienza con una pequeña introducción histórica de la formulación planteada por Namias en 1980, luego relaciona la transformada fraccional de Fourier con la teoría de la difracción, se realiza un análisis del principio de Huygens Fresnel y la teoría del campo autoconsistente; conceptos aplicados a la teoría de resonadores, se interpreta la difracción de Fresnel como una transformación de Fourier entre casquetes esféricos y con ayuda conceptual del paso de una haz luminoso a través de una lente delgada se encuentran los operadores de la difracción, posteriormente se analizan las condiciones de obtención óptica de la transformación fraccional de Fourier y se introduce el concepto de óptica fraccional de Fourier de manera general.

Palabras claves: Fórmula de Collins, Matriz de transferencia de rayos, óptica fraccional de Fourier.

REPRESENTACIÓN INTEGRAL DE LA TRANSFORMADA FRACCIONAL DE FOURIER

En el caso de la transformación usual de Fourier se puede mostrar que las funciones propias del operador transformación de Fourier $\mathfrak{F}_{\left(\frac{\pi}{2}\right)}$ son las funciones de Hermite-

Gauss: $\exp\left(\frac{-x^2}{2}\right)H_n(x)$ donde $H_n(x)$ son los polinomios de Hermite de orden n; por tanto se puede escribir la siguiente relación^[1]:

$$\mathfrak{F}_{\left(\frac{\pi}{2}\right)} \exp\left(\frac{-x^2}{2}\right)H_n(x) = e^{i\frac{\pi}{2}} \exp\left(\frac{-x^2}{2}\right)H_n(x) \quad (1)$$

Es posible en concordancia con el anterior resultado considerar la expresión:

$$\mathfrak{F}_\alpha \exp\left(\frac{-x^2}{2}\right)H_n(x) = e^{i\alpha} \exp\left(\frac{-x^2}{2}\right)H_n(x) \quad (2)$$

Este operador generalizado puede ser representado en la forma:

$$\exp(i\alpha A)\exp\left(\frac{-x^2}{2}\right)H_n(x) = e^{in\alpha}\exp\left(\frac{-x^2}{2}\right)H_n(x) \quad (3)$$

Donde se obtiene que:

$$A = -\frac{1}{2}\frac{d^2}{dx^2} + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2} \quad (4)$$

Es posible definir a este operador como el operador de transformación fraccional de Fourier y se hace entonces evidente que para el caso en el cual se cambia α por $-\alpha$ se obtiene la transformación de Fourier fraccional inversa. Así mismo es sencillo determinar que para el caso $\alpha = \frac{\pi}{2}$ se encuentra la transformada estándar de Fourier,

para la situación $\alpha = 0$ se produce el operador identidad, para $\alpha = \pi$ el operador paridad y así sucesivamente. Definiendo el orden de la transformación fraccional de Fourier como $n = \alpha \frac{\pi}{2}$ con $-2 \leq n \leq 2$.

De la ecuación (2) se tiene que las funciones de Hermite-Gauss son las funciones propias del operador $\mathfrak{F}_\alpha$ con valores propios $e^{in\alpha}$ y como es bien sabido una función de cuadrado integrable $f(x)$ puede ser expandida en términos de estas funciones propias donde el cálculo de los coeficientes se realiza aplicando las propiedades de ortogonalidad de los polinomios de Hermite y el uso de la fórmula de Mehler. De tal forma que se obtiene^[1]:

$$\mathfrak{F}_\alpha f(x) = \frac{\exp\left[-i\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2}\right)\right]}{\sqrt{2\pi \sin\alpha}} \exp\left(-\frac{ix^2}{2} \cotan\alpha\right) \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{ix'^2}{2} \cotan\alpha + \frac{ixx'}{\sin\alpha}\right) f(x') dx' \quad (5)$$

TRANSFORMACIONES FRACCIONALES DE FOURIER DE FUNCIONES SIMPLES^[1]

FUNCION	TRANSFORMADA FRACCIONAL DE FOURIER
1	$\frac{e^{-i\frac{\alpha}{2}}}{\sqrt{\cos\alpha}} \exp\left[i\frac{x^2}{2} \tan\alpha\right]$
$\exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)$	$\exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)$
$H_n(x) \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)$	$e^{in\alpha} H_n(x) \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)$

$$\exp\left(-\frac{x^2}{2} + ax\right) \quad \exp\left(-\frac{x^2}{2} - i\frac{a^2}{2}e^{i\alpha}\sin\alpha + axe^{i\alpha}\right)$$

$$\delta(x) \quad \frac{\exp\left(i\frac{\pi}{4} - i\frac{\alpha}{2}\right)}{\sqrt{2\pi}\sin\alpha} \exp\left(-i\frac{x^2}{2}\operatorname{ctg}\alpha\right)$$

$$\delta(x-a) \quad \frac{\exp\left(i\frac{\pi}{4} - i\frac{\alpha}{2}\right)}{\sqrt{2\pi}\sin\alpha} \exp\left[-\frac{i}{2}\operatorname{ctg}\alpha(x^2+a^2) + iax\operatorname{csc}\alpha\right]$$

$$e^{ikx} \quad \frac{e^{-i\frac{\alpha}{2}}}{\sqrt{\cos\alpha}} \exp\left[\frac{i}{2}\operatorname{tg}\alpha(k^2+x^2) + ikx\operatorname{secc}\alpha\right]$$

CÁLCULO OPERACIONAL GENERALIZADO

Utilizando la definición de la transformada fraccional de Fourier es simple deducir las siguientes propiedades que hacen parte de la forma de operar de esta definición de la transformación fraccional^[1]:

Regla de la multiplicación
 Regla de la diferenciación
 Regla del producto combinado
 Regla de la división
 Regla de la integración
 Regla del desplazamiento
 Regla de la similaridad
 Regla del exponencial

APLICACIONES PURAMENTE MATEMATICAS

Hasta ahora las potenciales aplicaciones de la transformada fraccional de Fourier abarcan básicamente dos grandes tópicos: la solución de ecuaciones diferenciales y en el campo de la óptica; en el primer caso se utiliza el principio de reducir el orden de la ecuación mediante la utilización de las reglas del cálculo operacional generalizado, es importante recalcar que este procedimiento es aplicado a la solución de ecuaciones diferenciales parciales y ordinarias de segundo orden que contienen términos cuadráticos en las variables involucradas y dentro de las cuales vale la pena destacar las relacionadas a continuación^[1]:

1. Solución de la ecuación de Schrödinger independiente del tiempo para el oscilador armónico cuántico
2. Funciones de Green para el oscilador armónico y la evolución temporal del paquete de onda
3. Funciones de Green para el oscilador armónico forzado

4. Estados estacionarios y niveles de energía para electrones libres en un campo magnético uniforme y constante
5. Evolución de paquetes de onda electrónicos en un campo magnético uniforme y constante
6. Solución de la ecuación de Schrödinger para electrones libres en un campo magnético uniforme variando temporalmente..

APLICACIONES EN LA OPTICA

Es nuestro propósito en este artículo presentar las aplicaciones de la transformación fraccional de Fourier al campo de la óptica dentro de las cuales destacaremos como las más relevantes en las áreas de la teoría de la difracción, teoría de resonadores, obtención óptica y digital de la transformada fraccional de Fourier bidimensional y la operación correlación fraccional.

DIFRACCIÓN DE FRESNEL Y TRANSFORMADA FRACCIONAL DE FOURIER

Reescribiendo la fórmula de la transformada fraccional de Fourier dada por Namias^[1] de manera bidimensional:

$$\mathfrak{F}^{\alpha}[U_A(\xi, \eta)] = \frac{\left[\exp\left[i\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)\right] \right]}{2\pi \sin \alpha} \exp\left(\frac{-i}{2 \tan \alpha}(u^2 + v^2)\right) \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(\frac{-i}{2 \tan \alpha}(\xi^2 + \eta^2)\right) \exp\left(\frac{i(u\xi + v\eta)}{\sin \alpha}\right) U_A(\xi, \eta) d\xi d\eta \quad (6)$$

Comparando la anterior definición con la fórmula de difracción de Fresnel:

$$U_P(u, v) = \frac{1}{i\lambda d} \exp\left(\frac{i\pi}{\lambda d}(u^2 + v^2)\right) \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} U_A(\xi, \eta) \exp\left(\frac{i\pi}{\lambda d}(\xi^2 + \eta^2)\right) \exp\left(\frac{-2i\pi(u\xi + v\eta)}{\lambda d}\right) d\xi d\eta \quad (7)$$

Donde el tiempo origen sobre P es desplazado con respecto al origen temporal en A, luego el factor $\exp\left(\frac{2i\pi d}{\lambda}\right)$ ha sido desestimado.

La similitud entre las dos expresiones permite visualizar el hecho de que es posible entonces escribir la fórmula de difracción de Fresnel como una transformación fraccional de Fourier como se detalla a continuación^[2,3].

Realizando un escalamiento^[4] tanto en las coordenadas del plano de difracción como para las coordenadas en el plano de observación ; teniendo en cuenta que de la fórmula de difracción de Fresnel se obtiene:

$$\alpha \neq 0, \quad \overline{\pi}$$

$$U_p(u, v) = \frac{2\pi \sin \alpha}{i\lambda d} \exp \left[\left(\frac{\sin^2 \alpha}{d} \right) \frac{i\pi (u^2 + v^2)}{\lambda} \right] \exp \left[-i \left(\frac{\pi}{2} - \alpha \right) \right] \mathfrak{F}^\alpha [U_A(\xi, \eta)] \quad (8)$$

resultado que se corresponde exactamente con la interpretación de la fórmula de difracción de Fresnel en términos de una transformación fraccional de Fourier, denotada por $\mathfrak{F}^\alpha$, con $\alpha = \frac{\pi}{2} n$.

Es muy interesante notar que se estableció una relación fraccional de Fourier entre las distribuciones de amplitud compleja del campo de salida $U_p(u, v)$ y la distribución de amplitud compleja del campo de entrada $U_A(\xi, \eta)$ (Ver ecuación 7). El factor de fase adicional en esta relación se interpreta como una onda divergente; lo cual quiere decir que la distribución de amplitud compleja de observación se encuentra ahora sobre una superficie esférica de radio dado por:

$$R = \frac{d}{\sin^2 \alpha} \quad (9)$$

TRANSFORMACIÓN DE FOURIER Y SISTEMAS ÓPTICOS

Es posible de manera general encontrar una expresión para los sistemas ópticos si se combina la fórmula de Collins y la fórmula de la transformación fraccional de Fourier^[5]:

La bien conocida fórmula de Collins la cual es una adecuada articulación entre la matriz de transferencia de rayos de un sistema óptico y la difracción de Fresnel está dada por:

$$U_p(u, v) = \frac{-i}{\lambda B} \exp \left(\frac{i\pi D(u^2 + v^2)}{\lambda B} \right) \iint_{-\infty}^{\infty} \exp \left(\frac{i\pi A(\xi^2 + \eta^2)}{\lambda B} \right) \exp \left(\frac{-2i\pi(u\xi + v\eta)}{\lambda B} \right) U_A(\xi, \eta) d\xi d\eta \quad (10)$$

Donde los valores ABCD corresponden a los elementos de la matriz de transferencia de rayos del sistema óptico^[6] considerado; si además se produce un escalamiento en las coordenadas de los planos de difracción y observación con las mismas restricciones y se ilumina con una onda esférica de radio $\frac{R_1}{A}$ el plano de observación se obtiene como resultado:

$$U_p(u, v) = \frac{2\pi \sin \alpha}{i\lambda B} \exp \left[\left(\frac{D}{B} - \frac{\cos^2 \alpha}{A \left(1 - \frac{B^2}{D} \right) B} \right) \frac{i\pi (u^2 + v^2)}{\lambda} \right] \exp \left[-i \left(\frac{\pi}{2} - \alpha \right) \right] \mathfrak{F}^\alpha [U_A(\xi, \eta)] \quad (11)$$

Expresión que permite obtener la difracción de Fresnel en términos de la transformada fraccional de Fourier para el caso de un sistema óptico cuya matriz de transferencia de rayos es conocida. Y de donde es posible concluir lo siguiente:

1. Si el valor del elemento de la matriz de transferencia de rayos está dado por $A=0$; siempre se obtendrá una transformada estándar de Fourier entre las superficies de difracción y de observación (ver ecuación 10). En la situación particular que además $D=0$ la transformada se obtendrá de manera exacta sobre una superficie plana.
2. Si el elemento de la matriz de transferencia de rayos $A \neq 0$; siempre se obtendrá una transformada fraccional de Fourier entre las superficies de difracción y de observación (ver ecuación 11) de lo cual se puede concluir que:

2.1. En el caso que la superficie de difracción sea plana la observación deberá realizarse en la superficie esférica de radio

$$R_2 = \frac{-AB}{AD - \cos^2 \alpha}$$

2.2. En el caso que la superficie de observación sea plana la iluminación sobre el plano de difracción deberá realizarse con onda esférica de radio $R_1 = \frac{ABD}{AD - \cos^2 \alpha}$.

2.3. En el caso que la superficie de observación sea esférica de radio R_2 la iluminación sobre el plano de difracción deberá realizarse con onda esférica de radio R_1 , conectadas mediante la expresión

$$R_2 = \frac{-AB \left(1 - \frac{B}{R_1} \right)}{AD \left(1 - \frac{B}{R_1} \right) - \cos^2 \alpha}.$$

- 2.4. Cuando se desee observar una transformación fraccional de Fourier entre superficies planas, tanto la superficie de difracción como de observación debe cumplir que $AD = \cos^2 \alpha$.
3. La obtención de la relación entre las distribuciones de amplitud complejas entre superficies planas a distancias finitas en el espacio libre no permite la obtención de una transformación fraccional, puesto que A y D son constantes y no son funciones de los parámetros del sistema óptico; por tanto su descripción estará totalmente definida por la fórmula de difracción de Fresnel (ver ecuación 7).
 4. La difracción es una transformada fraccional de Fourier cuyo orden depende de la distancia donde el campo difractado es observado. La continuidad de la transformada fraccional de Fourier con respecto a sus ordenes corresponde a la continuidad de propagación de onda y a la continuidad entre el fenómeno de difracción de Fresnel y de Fraunhofer. También puede ser mostrado que las leyes de composición de la transformada fraccional de Fourier están de acuerdo con el principio de Huygens.
 5. La transformada fraccional de Fourier aparece como una herramienta matemática apropiada para la expresión de la difracción de Fresnel bajo aproximación paraxial^[7]. La transformada de Fourier estándar es un caso especial que corresponde a la difracción de Fraunhofer.
 6. La transferencia entre dos medios homogéneos e isotrópicos puede también ser representada con la ayuda de la transformada fraccional de Fourier abriendo un

nuevo camino de proceder con la óptica de Fourier y la teoría de formación de imágenes.

OPERADORES DE LA DIFRACCIÓN

Si se considera de nuevo la fórmula de difracción de Fresnel (ver ecuación 7) de la siguiente forma :

$$U_p(u,v)\exp\left(\frac{-i\pi}{\lambda(-d)}(u^2+v^2)\right) = \frac{1}{i\lambda d} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} U_A(\xi,\eta)\exp\left(\frac{-i\pi}{\lambda d}(\xi^2+\eta^2)\right)\exp\left(\frac{2i\pi(u\xi+v\eta)}{\lambda d}\right)d\xi d\eta \quad (12)$$

Lo cual se puede escribir en términos de las superficies esféricas tangentes a los planos de observación y difracción dados por:

$$U_{A_{Sph}}(\xi,\eta) = U_A(\xi,\eta)\exp\left(\frac{-i\pi(\xi^2+\eta^2)}{\lambda(d)}\right) \quad (13)$$

y

$$U_{P_{Sph}}(u,v) = U_P(u,v)\exp\left(\frac{-i\pi(u^2+v^2)}{\lambda(-d)}\right) \quad (14)$$

Reemplazando se obtiene:

$$U_{P_{Sph}}(u,v) = \frac{1}{i\lambda d} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} U_{A_{Sph}}(\xi,\eta)\exp\left(\frac{2i\pi(u\xi+v\eta)}{\lambda d}\right)d\xi d\eta \quad (15)$$

Introduciendo coordenadas adecuadas de escalamiento en las superficies de difracción y de observación se obtiene que:

$$U_{P_{Sph}}(u,v) = \frac{2\pi}{i\lambda d} \mathfrak{F}[U_{A_{Sph}}(\xi,\eta)] \quad (16)$$

Lo cual permite interpretar a la fórmula de difracción de Fresnel como una transformación estándar de Fourier entre dos superficies esféricas concéntricas como se muestra en la figura 1.

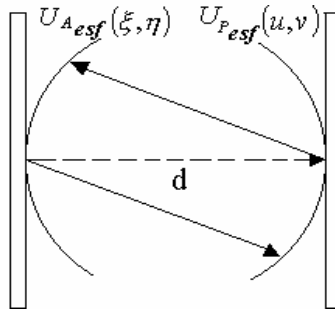


Fig. 1. Difracción de Fresnel entre superficies esféricas de entrada A y salida P.

La difracción de Fresnel es una transformada fraccional de orden 1 entre dos superficies esféricas cuyos vértices están localizados sobre la misma esfera y separados una distancia igual al radio de la esfera. Este resultado desde el punto de vista de la óptica paraxial tiene el mismo significado al del operador esfera de Fourier obtenido en la aproximación metaxial^[7]. Es decir $U_{P_{Sph}}(u, v)$ es la esfera de Fourier de $U_{A_{Sph}}(\xi, \eta)$.

Si ahora se tiene en cuenta la configuración de la figura 2; que muestra el efecto del paso de un haz luminoso a través de una lente delgada:

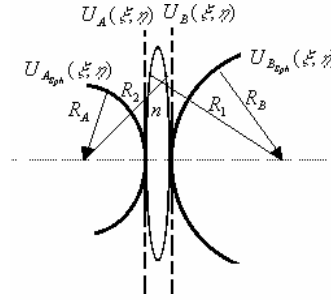


Fig. 2. Operador transparencia de curvatura

$U_A(\xi, \eta)$ es la distribución de campo inmediatamente detrás de la lente y $U_B(\xi, \eta)$ es la distribución de campo inmediatamente después de la lente; con ayuda de la transformación de fase introducida por una lente, considerando $R_1 = R_B$ y $R_2 = R_A$; la aproximación de ondas esféricas convergentes y divergentes y propagación en el espacio libre se obtiene que:

$$U_{B_{Sph}}(\xi, \eta) = U_{A_{Sph}}(\xi, \eta) \exp \left(\frac{-i\pi(\xi^2 + \eta^2)}{\lambda} \left(\frac{1}{R_B} - \frac{1}{R_A} \right) \right) \quad (17)$$

Resultado que permite obtener el operador transparencia de curvatura en aproximación paraxial.

Con ayuda de estos dos operadores es posible entonces obtener la distribución de amplitud compleja en el espacio libre y se abre de esta forma la posibilidad de modificar la enseñanza de la difracción únicamente con la correcta aplicación de los operadores esfera de Fourier o transferencia de campo electromagnético y transparencia de curvatura.

TEORIA DE RESONADORES

La configuración descrita en la figura 1 se puede hacer corresponder con un resonador confocal de espejos esféricos de radios iguales $d^{[6,8]}$. Para comprobar la correspondencia entre la ecuación (11) y el principio de Huygens-Fresnel se debe obtener que las superficies de los espejos son coincidentes con los frentes de fase de los modos del resonador; cumpliendo así con la teoría de campo autoconsistente. De lo contemplado en el literal 2.3 y la ecuación (11) es fácil obtener la condición de estabilidad en resonadores multielementos :

$$0 < A \left(1 - \frac{B}{R_1} \right) \left(D - \frac{B}{R_2} \right) < 1 \quad (18)$$

En la situación particular de un resonador vacío se obtiene la expresión clásica:

$$0 < \left(1 - \frac{1}{R_1} \right) \left(1 - \frac{1}{R_2} \right) < 1 \quad (19)$$

Si ahora se considera una haz Gausiano $\exp \left[\frac{-\pi (\rho^2 + \gamma^2)}{2} \right]$ viajando del espejo de radio de curvatura R_1 al espejo de radio de curvatura R_2 ; En concordancia con los resultados preliminares, la invarianza de los haces Gausianos a una transformación fraccional y al escalamiento utilizado para obtener la ecuación 11 se tiene que:

$$\exp \left[\frac{-\pi (u'^2 + v'^2)}{2} \right] = \exp \left[\frac{-\pi}{\lambda} \left(\frac{\sin \alpha \cos \alpha}{d \left(\frac{d}{R_1} - 1 \right)} \right) \frac{(u^2 + v^2)}{2} \right] \quad (20)$$

Teniendo en cuenta que la propagación es del espejo con radio de curvatura R_1 al espejo con radio de curvatura R_2 ; la siguiente relación puede ser establecida:

$$\frac{\lambda}{\pi w_2^2} = \frac{\sin \alpha \cos \alpha}{d \left(\frac{d}{R_1} - 1 \right)} \quad (21)$$

Donde w es un parámetro real referido al parámetro complejo del haz y describe la variación Gausiana de la intensidad del haz con la distancia al eje óptico, así como la curvatura frontal de la fase. Si se utiliza la condición de estabilidad de los resonadores se obtiene:

$$w_2^4 = \left(\frac{\lambda R_2}{\pi} \right)^2 \frac{(R_1 - d)}{(R_2 - d)} \left(\frac{d}{R_1 + R_2 - d} \right) \quad (22)$$

El simple cambio de R_1 por R_2 permite obtener la expresión para w_1^4

De las anteriores ecuaciones se obtiene la cintura del haz como:

$$w_0^4 = \left(\frac{\lambda}{\pi} \right)^2 \frac{d(R_1 - d)(R_2 - d)(R_1 + R_2 - d)}{(R_1 + R_2 - 2d)^2} \quad (23)$$

Con ayuda de un programa se ha simulado los modos de oscilación a la entrada de la cavidad; es decir en el espejo de radio de curvatura R_1 y lo observado sobre la salida del resonador, es decir sobre el espejo de superficie esférica R_2 .

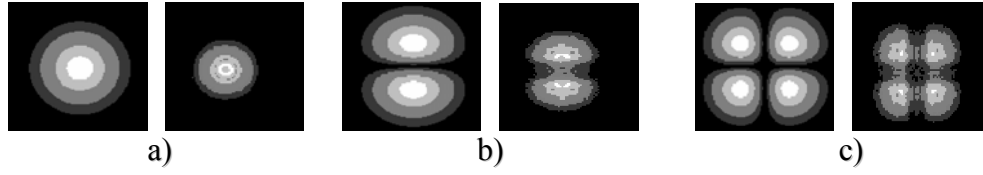


Fig. 3. Simulación de los modos de oscilación a la entrada y salida de la cavidad resonante.
a) TEM₀₀ b) TEM₀₁ c) TEM₁₁.

REALIZACIÓN ÓPTICA DE LA TRANSFORMADA FRACCIONAL DE FOURIER

De acuerdo con lo estudiado en los preliminares es posible obtener una transformada fraccional de Fourier para el caso indicado en el literal 2.4; el cual es bastante importante desde el punto de vista experimental pues posibilita la obtención de esta transformación entre superficies planas. En el caso particular conocido como montaje canónico de Lohmann tipo I^[9-14] (ver figura 4).

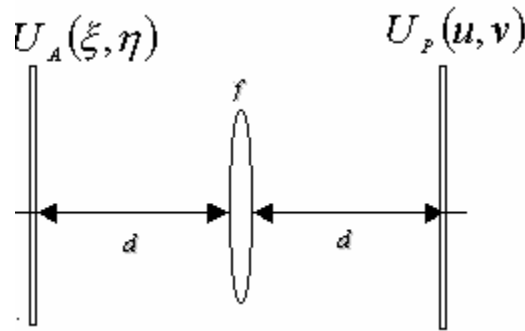


Fig. 4. Estructura óptica del montaje canónico de Lohmann tipo I.

Se muestra que la matriz de transferencia de rayos está dada por los elementos $A = 1 - \frac{d}{f}$; $B = 2d - \frac{d^2}{f}$; $C = -\frac{1}{f}$ y $D = 1 - \frac{d}{f}$; lo cual requiere para el cumplimiento de la condición que:

$$d = 2f \sin^2 \frac{\alpha}{2} \quad (24)$$

De manera general se puede decir que la realización óptica de la transformación fraccional de Fourier es posible con el cumplimiento de los requisitos exigidos en los literales 2.1 al 2.4 estudiados previamente.^[15-18]

Con ayuda del montaje canónico de Lohmann tipo I, se obtuvieron experimentalmente los órdenes de difracción $\frac{1}{2}$ y 1 ver figura 5.

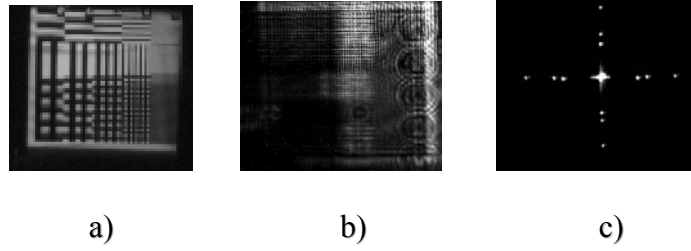


Fig . 5. Resultados experimentales a) orden cero b) orden $\frac{1}{2}$ c) Orden uno

CORRELACION FRACCIONAL

Teniendo en cuenta la definición de la transformada fraccional de Fourier y la conservación del principio de Huygens^[19-21] es posible definir matemáticamente el concepto de correlación fraccional como sigue :

$$C_{12}^{(\alpha,\beta,\gamma)} = \mathfrak{F}^{\gamma} \{ \mathfrak{F}^{\alpha} [U_A(\xi,\eta)] \otimes \mathfrak{F}^{\beta} [U_A(\xi,\eta)] \} \quad (25)$$

Lo cual permite explorar nuevas posibilidades en el campo del tratamiento de señales y particularmente de imágenes digitales; con ayuda de un programa diseñado en computador es posible simular la correlación entre dos letras a medida que se considera un orden mayor en un correlador tipo JTC (aquí, $\alpha=\beta=\gamma$).

Como se puede notar los picos laterales empiezan a decrecer a medida que se incrementa el valor del orden (ver figura 6).

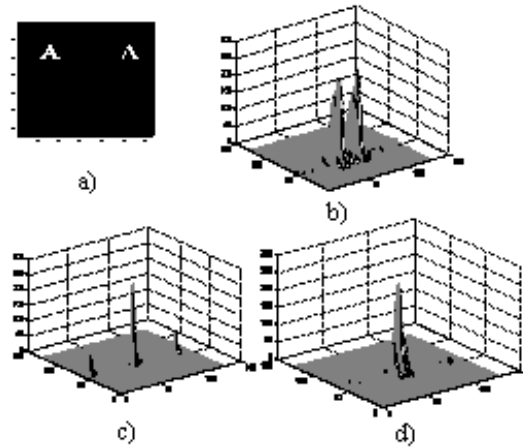


Fig . 6. Correlación fraccional a) figura de entrada b) orden $\frac{1}{2}$ c) Orden 0.8 d) orden 0.9

OPTICA FRACCIONAL DIGITAL

Los resultados anteriores permiten por tanto definir lo que se conoce como óptica fraccional de Fourier^[22-26], en particular para comenzar a abordar esta temática se ha implementado en la plataforma Matlab un programa que permite realizar operaciones básicas del tratamiento digital de imágenes con ayuda de la transformación fraccional de Fourier ver figura 7.

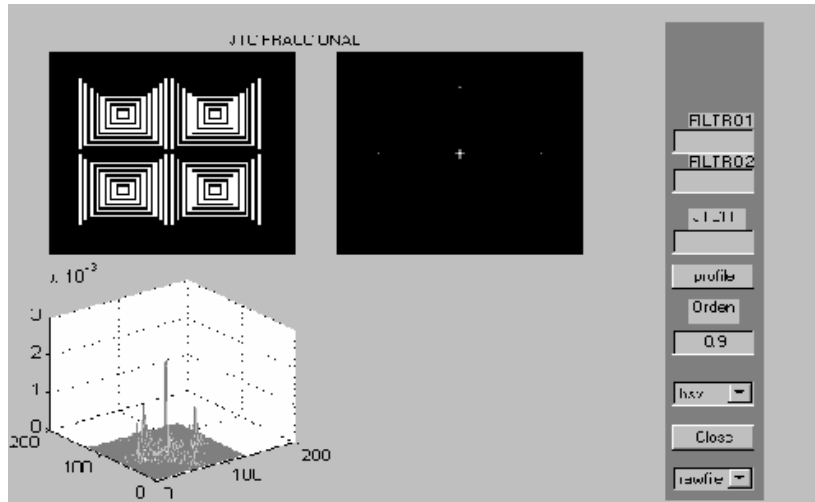


Fig . 7. Software para procesamiento digital de imágenes con la transformada fraccional de Fourier

CONCLUSIONES

Se ha probado de manera clara y sencilla como se puede introducir la transformación fraccional de Fourier en el campo del análisis y procesamiento de imágenes, así como sus potencialidades. Es importante recalcar el valor que ha tenido el auge de estos tópicos en la medida que grandes volúmenes de aplicaciones con esta nueva herramienta han suscitado. El propósito de la conferencia que acompañó a este artículo no fue otro distinto al de dar a conocer la transformada fraccional de Fourier en la comunidad de ópticos de Colombia con la firme convicción de su ulterior aplicación a los diferentes trabajos de investigación que se realizan al interior de la red colombiana de óptica.

AGRADECIMIENTOS

El primer autor expresa sus más sinceros agradecimientos al Grupo de Óptica y Tratamiento de Señales de la Universidad Industrial de Santander (UIS) donde realiza estudios para obtener el título de Doctor en Ciencias Naturales - Física.

REFERENCIAS

- [1] V. Namias, J. Inst. Math. Appl. 25 (1980) 241
- [2] P. Pellat-Finet, Opt. Lett. 19 (1994) 1388.
- [3] T. Alieva, V. Lopez, F. Agullo-Lopez, and L. B. Almeyda, Journal of modern optics.41 (1994) 1037.
- [4] J. Hua, L. Liu and G. Li, Appl. Opt. 36 (1997) 8490.
- [5] S. A. Collins, J. Opt. Soc. Am. 60 (1970) 1168.
- [6] H. Kogelnik and T. Li, Proceedings of IEEE. (1966) 172.
- [7] P. Pellat-Finet and G. Bonnet, Opt. Comm. 111 (1994) 141.

- [8] D. Zhao, Opt. Comm. 168 (1999) 85.
- [9] W. Lohmann, J. Opt. Soc. Am. A. 10 (1993) 2181.
- [10] W. Lohmann, Opt. Comm. 115 (1995) 437.
- [11] Y. Bitran, D. Mendlovic, R. G. Dorsch, A. Lohmann and H. Ozaktas Appl. Opt. 34 (1995).
- [12] R. G. Dorsch, Appl. Opt. 34 (1995) 6016.
- [13] S. H. Ozaktas and D. Mendlovic, Opt. Comm. 120 (1995) 134. 1329.
- [14] D. Mendlovic, Z. Zalevsky, N. Konforti, R. Dorsch and A. Lohmann, Appl. Opt. 34 (1995) 7615.
- [15] Z. Liu, X. Wu and D. Fan, Opt. Comm. 155 (1998) 7.
- [16] H. Ozaktas and D. Mendlovic, Opt. Lett. 19 (1994) 1678.
- [17] H. Ozaktas and D. Mendlovic, J. Opt. Soc. Am. A. 12 (1995) 743.
- [18] W. Lohmann, Z. Zalevsky, R. G. Dorsh and D. Mendlovic, Opt. Comm. 146 (1998) 55.
- [19] P. Enders, Eur. J. Phys. 17 (1996), 226-235.
- [20] C. J. R. Sheppard and K. G. Larkin, Opt. Comm. 154 (1998) 173.
- [21] S. Liu, H. Ren, J. Zhang and X. Zhang, Appl. Opt. 36 (1997) 5671.
- [22] P. Pellat-Finet, C. R. Acad. Sci. Paris, 327 (1999) 1269.
- [23] Y. Zhang, B. Gu, B. Dong and G. Yang W, Opt. Comm. 169 (1999) 292.
- [24] S. H. Ozaktas and D. Mendlovic, Appl. Opt. 37 (1998) 2130.
- [25] X. Wang and J. Zhou, Opt. Comm. 147 (1998) 341.
- [26] C. Palma and V. Bagini, J. Opt. Soc. Am. A. 14 (1997) 1774.

