

LOS FILTROS DE MUESTREO Y EL FENÓMENO DE AUTOIMAGEN.

Rodrigo Henao¹

Resumen.

Los filtros de muestreo son elementos difractivos que permiten, bajo cualquier tipo de iluminación crear múltiples imágenes de un objeto sin sistemas ópticos adicionales. Los filtros pueden ser descritos como arreglos de microlentes y mediante este modelo se determina la formación de imágenes. Haciendo uso de este formalismo desarrollado se establece una descripción teórica alternativa para el efecto de auto-imágenes bajo iluminación incoherente conocido como efecto Lau.

1. Propiedades de formación de imagen de los filtros de muestreo.

Un filtro de muestreo es un objeto óptico plano consistente de pequeñas aberturas distribuidas en un arreglo cuadrado, Fig.1. La transmitancia del filtro se puede escribir como $T_1(x, y) = T(x, y) \otimes g(x, y)$, donde $T(x, y)$ es proporcional a la función peine (comb)

$$T(x, y) = \sum_{u=-\infty}^{+\infty} \sum_{v=-\infty}^{+\infty} \delta(x - ud, y - vd) = \frac{1}{d^2} \text{comb}\left(\frac{x}{d}, \frac{y}{d}\right) \quad (1)$$

Cuando el objeto plano de entrada es insertado enfrente de un filtro de muestreo y es iluminado por luz monocromática (coherente o incoherente) entonces se obtendrán múltiples imágenes en diferentes planos detrás del objeto.

¹ Grupo de Óptica, Instituto de Física, Universidad de Antioquia A. A. 1226 Medellín-COLOMBIA. rhenao@fisica.udea.edu.co

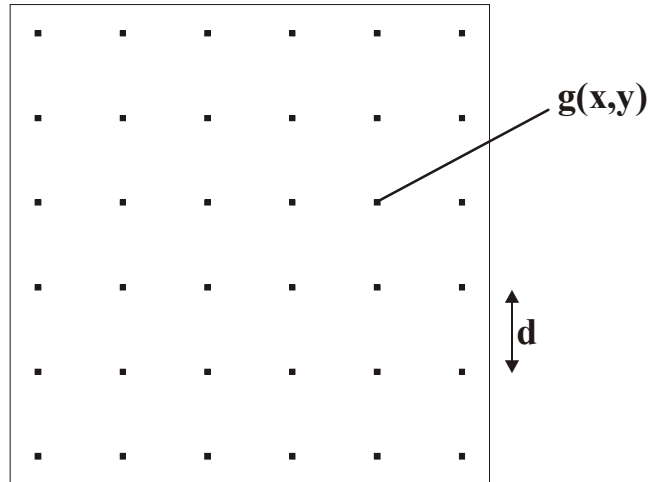


Figura 1. Representación gráfica de un filtro de muestreo

Las múltiples imágenes en diferentes planos difieren en concentración descrita por el parámetro $\alpha = a / A$; donde a es una distancia entre los centro de imágenes vecinas y A es el tamaño de una sola imagen. El aumento de las imágenes se incrementa con la distancia entre el filtro y su plano imagen, Fig.2.

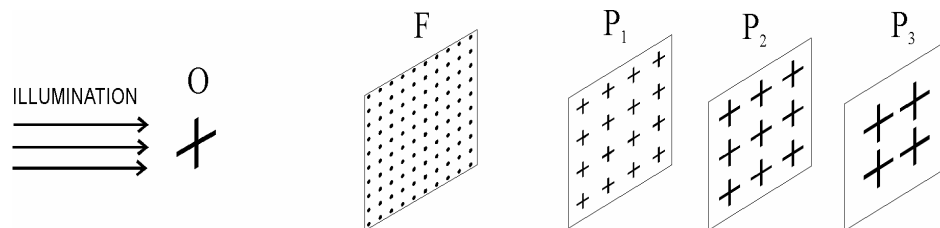


Figura 2. F – Filtro de muestreo; P_1 , P_2 , P_3 – Planos de la imágenes múltiples del objeto O.

En orden de explicar este efecto es conveniente usar otra forma equivalente de la función^[1] T(x,y)

$$T(x,y) = \sum_{H=-\infty}^{+\infty} \sum_{K=-\infty}^{+\infty} C_1(H) C_1(K) \exp \left\{ -\frac{ik}{2f_{mM}} \left[(x - Hd_1 - D)^2 + (y - Kd_1 - D)^2 \right] \right\} \quad (2)$$

donde

1) $f_{mM} = \frac{d^2}{2\lambda} \frac{m}{M}$ es un parámetro caracterizado por los números naturales m

y M tales que no tienen factores en común.

$$2) \quad d_I = \begin{cases} d/M, m - \text{par} \\ d/2M, m - \text{impar} \end{cases} \quad 3) \quad D = \begin{cases} d/2M, m = 2, 6, 10... \\ d/2M, m - \text{otros casos} \end{cases}$$

4) $C_1(H)$ son los coeficientes de fase de las mismas magnitudes, los cuales pueden ser calculados como

$$C_I(H) = \begin{cases} C(H), m \text{ es impar} \\ C(2H), m \text{ es divisible por 4} \\ C(2H+1), m \text{ es par y indivisible por 4} \end{cases} \quad C(H) = \frac{1}{md} \exp \left(\frac{i\pi H^2}{2Mm} \right) \sum_{h=0}^{m-1} \exp \left[\frac{2\pi i (h^2 M - hH)}{m} \right]$$

Vale la pena tener en cuenta que los valores de fase la suma que define la función T(x,y) son las transmitancias de lentes delgadas de distancia focal f_{mM} en la aproximación paraxial de Fresnel. Estos factores de fase son los responsables de las propiedades de formación de imágenes del filtro de muestreo y por lo tanto podemos el siguiente modelo de formación de imágenes:

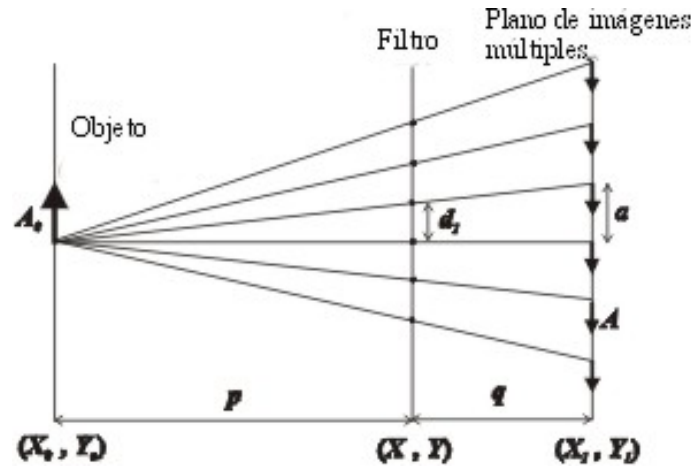


Figura 3. Imágenes formadas por lentes de distancias focales f_{mM} .

- 1) El centro de las lentes tienen coordenadas $(x - Hd_1 - D, y - Kd_1 - D)$ en el plano del filtro donde H, K números enteros.
- 2) El producto $C_1(H)C_1(K)$ determina un cambio de fase introducido por la lente apropiada.
- 3) Se cumple las siguientes relaciones para una lente:

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{f_{mM}}, \quad A = \frac{A_o q}{p}, \quad \frac{a}{p+q} = \frac{d_1}{p},$$

donde p es la distancia entre el plano objeto y el filtro de muestreo, q es la distancia entre el plano de la imágenes múltiples y el filtro, A es el tamaño de una sola imagen, A_o es el tamaño del objeto y a es el período en el plano imagen siendo la distancia entre imágenes vecinas.

Los parámetros f_{mM} , d_1 , D toman diferentes valores para diferentes pares (m, M) de números naturales sin factores comunes. Esto significa que existe un número infinito de forma de la transmitancia $T(x, y)$. Un plano imagen corresponde a un par fijo de números (m, M) . Por lo tanto las imágenes múltiples aparecen en muchos planos. Estas imágenes que difieren por su concentración, definida por el parámetro $\alpha = a/A$. En la

practica se observa el fenómeno de formación de imagen en planos donde $\alpha > 1$, y por lo tanto las imágenes no se superpondrán.

Por medio de presente ecuación característica para las lentes y la definición $f_{mM} = \frac{d^2}{2\lambda} \frac{m}{M}$, se puede escribir el coeficiente α de la siguiente forma:

$$\alpha = \begin{cases} \frac{2p\lambda}{A_0 dm}, & \text{para } m \text{ par} \\ \frac{p\lambda}{A_0 dm}, & \text{para } m \text{ impar} \end{cases} \Rightarrow \alpha_{\max} = \alpha(m=1) = \alpha(m=2)$$

Generalmente: m crece $\Rightarrow \alpha$ decrece.

Hasta ahora se ha analizado la formación de imágenes de filtros de muestreo ideales con una transmitancia $T(x,y)$, donde el elemento de muestreo fue infinitesimalmente pequeño ($g(x,y) = \delta(x,y)$). En el caso de un filtro de muestreo real las agujeros tienen dimensiones finitas y $g(x,y) \neq \delta(x,y)$.

2. Resolución de la formación de imágenes de filtros de muestreo reales.

La transmitancia de una lente particular $T_1(x,y) = T(x,y) \otimes g(x,y)$ esta descrita por la siguiente convolución:

$$t_{HK}(x,y) = \exp\left\{-\frac{ik}{2f_{mM}}[(x - Hd_1 - D)^2 + (y - Kd_1 - D)^2]\right\} \otimes g(x,y) . \quad (3)$$

De acuerdo a la difracción de Fresnel y la teoría de las lentes, la función $g(x,y)$ define los puntos focales y la respuesta impulso de la formación de imágenes. Cuando una transmitancia de amplitud del objeto a la entrada se describe por $U(x_o, y_o)$ entonces la distribución de intensidad que corresponde a una sola imagen es proporcional a

$$I_1 = \left| U \left[-\frac{(x_1 - Hd_1 - D)p}{q}, -\frac{(y_1 - Kd_1 - D)p}{q} \right] \right|^2 \otimes \left| g \left(\frac{x_1 f_{mM}}{q}, \frac{y_1 f_{mM}}{q} \right) \right|^2 \quad (4)$$

en el caso de iluminación espacialmente incoherente, o es proporcional a

$$I_2 = \left| U \left[-\frac{(x_1 - Hd_1 - D)p}{q}, -\frac{(y_1 - Kd_1 - D)p}{q} \right] \right|^2 \otimes \left| g \left(\frac{x_1 f_{mM}}{q}, \frac{y_1 f_{mM}}{q} \right) \right|^2 \quad (5)$$

cuando el objeto es iluminado por una onda plana coherente. La resolución de una imagen particular es equivalente a la que es formada por una lente de distancia focal f_{mM} y una función de pupila $P(x,y)$ expresada por la transformada inversa de Fourier de la celda elemental de muestreo:

$$P(x,y) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} g(u,v) \exp \left[\frac{2\pi i (ux + vy)}{\lambda f_{mM}} \right] du dv. \quad (6)$$

3. Regiones de formación de imágenes por muestreo

I: valores pequeños de $f_{mM} = \frac{d^2}{2\lambda} \frac{m}{M}$ entonces las imágenes son pequeñas y borrosas a causa de la resolución limitada (las dimensiones características de los agujeros de muestreo son comparables al tamaño de las imágenes).

II: valores altos de $f_{mM} = \frac{d^2}{2\lambda} \frac{m}{M}$, m se incrementa entonces α decrece; por lo tanto las imágenes múltiples se superponen y no son visibles.

III: las múltiples imágenes están separadas y tienen resolución aceptable.

$\alpha_{\max} = \alpha(m=1) = \alpha(m=2) \Rightarrow f_{21} = d^2 / \lambda$ es usualmente lo más conveniente desde el punto de vista práctico.

4. Descripción del efecto Lau^[2] mediante la teoría del filtro de muestreo.

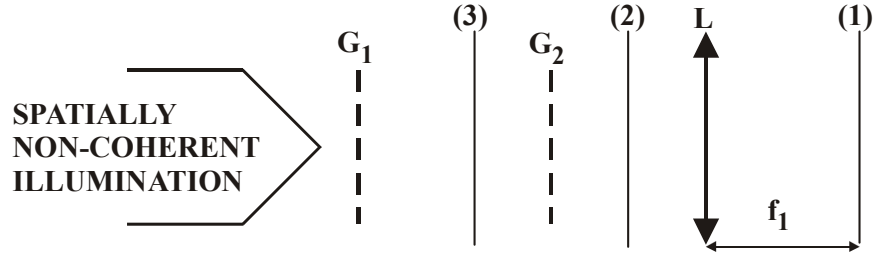


Figura 4. Montaje óptico para el efecto Lau

Los valores d_1, d_2 y las funciones $t_1(x), t_2(x)$ que denotan respectivamente los períodos y las transmitancias de las redes G_1, G_2 (Fig.4.). Las transmitancias se pueden expresar como

$$T_1(x) = t_1(x) \otimes \sum_u \delta(x - ud_1), \quad T_2(x) = t_2(x) \otimes \sum_u \delta(x - ud_2), \quad (7)$$

u denota un entero y $\otimes$ convolución. Estas transmitancias se pueden interpretar como las de un filtro de muestreo unidimensional:

$$\sum_u \delta(x - ud_2) = \sum_H C(H) \exp \left[-\frac{ik}{2f} (x - Hd_2' - D)^2 \right], \quad (8)$$

$$\text{donde} \quad f = \frac{d_2^2}{2\lambda} \frac{m}{M}, \quad d_2' = \begin{cases} d_2/M, m - \text{par} \\ d_2/2M, m - \text{impar} \end{cases}, \quad (9)$$

H es un entero. $D = d_2/2M$ cuando m es par y indivisible por 4 ($m=2, 6, 10, \dots$) y $D=0$ para los otros casos.. $C(H)$ son coeficientes complejos:

$$C(H) = (1/md_2) \exp(i\pi H_1^2/2Mm) \sum_{h=0}^{m-1} \exp[i2\pi(h^2M - hH_1)/m]; \quad \text{donde}$$

$H_1 = H$ para m impar, $H_1 = 2H$ para m divisible por 4 y $H_1 = 2H + 1$ otros casos.

De acuerdo a las ecuaciones (7), (8) la transmitancia de la red G_2 se expresa como

$$T_2(x) = \sum_H C(H) \exp \left[-\frac{ik}{2f} (x - Hd_2' - D)^2 \right] \otimes t_2(x). \quad (10)$$

Por lo tanto la transmitancia de la red G_2 es ópticamente equivalente a un conjunto de lentes cilíndricas con longitud focal f . En la aproximación paraxial de Fresnel la línea focal de una lente cilíndrica esta descrita por $C(H)t_2(x - Hd_2' - D)^{[3]}$. La ecuación (10) permite definir en una forma simple la respuesta al impulso del sistema formador de imagen con la red G_2 . La respuesta al impulso que describe la amplitud compleja del campo en el plano de salida, generada por un punto objeto situado en el plano de la primera red G_1 . De nuevo se cumple la siguiente ecuación:

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{f}, \quad a = d_2' \frac{p+q}{p}, \quad (11)$$

donde p es la distancia entre las redes, q entre la red G_2 y el plano de salida y a denota distancia entre las imágenes de los objetos puntuales y

creadas por lentes vecinas que corresponde a la red G_2 . La respuesta al impulso de toda la red G_2 en el caso coherente es:

$$h(x_1) = \sum_H C(H) t_2 \left(x_1 \frac{f}{q} - Ha - D' \right), \quad (12)$$

donde $D' = D \frac{p+q}{p}$.

En este caso la condición de no superposición (CN) debe ser impuesta que requiere que los rangos de valores no cero de las funciones $t_2 \left(\frac{x_1 f}{q} \right)$ y $t_2 \left(\frac{x_1 f}{q} - a \right)$ no se superpongan. Cuando se cumple la condición CN entonces la respuesta al impulso en el caso de iluminación incoherente se puede escribir como:

$$|h(x_1)|^2 = |C|^2 \left| t_2 \left(x_1 \frac{f}{q} \right) \right|^2 \otimes \sum_H \delta(x_1 - Ha - D'), \quad (13)$$

donde $|C|^2 = |C(H)|^2 = \text{const}$ y D' produce solamente desplazamiento lateral de la función $|h(x_1)|^2$. Los parámetros $|C|^2$ y D' no juegan un papel importante y pueden ser omitidos. Rescribiendo $|h(x_1)|^2$:

$$|h(x_1)|^2 = \left| t_2 \left(x_1 \frac{f}{q} \right) \right|^2 \otimes \sum_H \delta(x_1 - Ha) \quad (14)$$

Cuando el objeto de entrada es la red G_1 con transmitancia $T_1(x_o)$, iluminada por luz espacialmente incoherente entonces las propiedades de las lentes permite concluir que la distribución de intensidad en plano de

salida es proporcional a $I(x_1) = |T_1(-x_1 p / q)|^2 \otimes |h(x_1 f / q)|^2$. De acuerdo con ecuación (7) esta se puede reescribir como:

$$I(x_1) = \left| t_1 \left(-x_1 \frac{p}{q} \right) \right|^2 \otimes \left| t_2 \left(x_1 \frac{f}{q} \right) \right|^2 \otimes \sum_u \delta(x_1 - u d_1 q / p) \otimes \sum_H \delta(x_1 - H a) \quad (15)$$

Se puede interpretar este resultado como una superposición incoherente de imágenes de la red G_1 . Cada imagen es creada independientemente por una lente cilíndrica que corresponde a la red G_2 . La distribución de intensidad a través de la imagen de la red G_1 es proporcional a:

$$I_1(x_1) = \left| t_1 \left(-x_1 \frac{p}{q} \right) \right|^2 \otimes \left| t_2 \left(x_1 \frac{f}{q} \right) \right|^2 \otimes \sum_u \delta(x_1 - u d_1 q / p). \quad (16)$$

$I_1(x_1)$ es una función periódica con periodo $d_1 p / q$. Las imágenes están mutuamente desplazadas por un factor a .

Para observar franjas de Lau las imágenes de la red G_1 se deben superponer adecuadamente: Esto ocurre cuando se satisface la siguiente condición de coincidencia (CC):

$$a = \frac{d_1 q}{p} \frac{n}{N}, \quad (17)$$

donde n, N son números naturales arbitrarios sin factor común.

Bajo la suposición de CN y CC la distribución de intensidad en el plano de salida se escribe como:

$$I(x_1) = \left| t_1 \left(-x_1 \frac{p}{q} \right) \right|^2 \otimes \left| t_2 \left(x_1 \frac{f}{q} \right) \right|^2 \otimes \sum_H \delta \left(x_1 - \frac{H d_1 q}{p N} \right). \quad (18)$$

Cuando en el plano de salida se obtiene una distribución periódica de intensidad con período $\frac{d_1 q}{p} \frac{1}{N}$. Cuando un mínimo igual a cero aparece

en el período de la función $I(x_1)$ se observa una estructura consistente en franjas de Lau bien definidas.

Referencias

- [1] A. Kolodziejczyk, "Lensless multiple image formation by using a sampling filter", *Opt. Commun.* **59**, 97-102 (1986).
- [2] K. Patorski, "The self-imaging phenomenon and its applications", *Progress in Optics XXVII*, edited by E. Wolf (Amsterdam: North-Holland, 1989), pp.3-108.
- [3] A. Kolodziejczyk, "Self-imaging effect - a new approach", *Opt. Commun.*, **65**, 84-86 (1988).