

**Implementación de un Correlador Fraccionario mediante el uso de  
un cristal fotorrefractivo**  
**Jorge Enrique Rueda P.<sup>1</sup>, Myrian Tebaldi, Nestor Bolognini, Sergio  
Granieri**

*Centro de Investigaciones Ópticas, CIOp (CONICET, CIC) y OPTIMO  
(Dpto. de Fisicomatemática, Facultad de Ingeniería, UNLP), apartado  
postal 124, (1900), Plata de La, Argentina.*

**Resumen**

En este trabajo se presentan los resultados de la implementación experimental de un correlador óptico de orden fraccionario variable. Se utilizó un cristal fotorrefractivo Bi12TiO20 (BTO) como medio de registro del filtro de correlación. El arreglo óptico está basado en un "fake zoom lens", con éste arreglo se puede obtener la transformada fraccionaria de una transparencia, para órdenes fraccionarios entre -1 y 1, conservando la escala de la transformación en todo el intervalo. Lo anterior permite que con un arreglo de correlación óptica basado en el "fake zoom lens" se pueda obtener la correlación  $C^{p,q,r}$  para varios órdenes fraccionarios  $q$  y  $r$ .

**Abstract**

In this work the results of the experimental implementation of an optic fractional correlator of order fractional variable are presented. A photorefractive crystal Bi12TiO20 was used (BTO) like half of registration of the correlation filter. The optic arrangement is based on a "fake zoom lens", with this arrangement one can obtain the one transformed fractional of a transparency, for fractional orders between -1 and 1, conserving the scale of the transformation in the whole interval. The above-mentioned allows that with an arrangement of optic correlation based on the "fake zoom lens" one can obtain the correlation  $C^{p,q,r}$  for several fractional orders  $q$  and  $r$ .

---

<sup>1</sup> Estudiante de Doctorado, Grupo de Óptica y Tratamiento de Señales, Escuela de Física-U.I.S., A.A.678.  
e-mail: jeruedap@uis.edu.co.

## Introducción

Un correlador permite medir el grado de similitud y/o localizar un objeto desconocido con uno de referencia. Vander Lugt<sup>1</sup> mostró que esta operación se puede implementar mediante un arreglo óptico. Goodman y Weaver<sup>2</sup> introducen el llamado Joint Transform Correlator (JTC).

Para este trabajo se eligió un cristal fotorrefractivo por su capacidad para almacenar patrones de intensidad luminosa, como variaciones en su índice de refracción y lectura de la información almacenada sin los procedimientos químicos utilizados en el revelado fotográfico<sup>3</sup>.

El correlador propuesto presenta una importante varianza a la traslación, varianza propia de la correlación fraccionaria<sup>4</sup>. Propiedad que hace interesante la operación de correlación fraccionaria para aplicaciones de posicionamiento o alineación de objetos dentro de una escena.

La transformada fraccionaria de Fourier<sup>4-7</sup>, de acuerdo a al modelo tipo I presentado por Lohmann, tiene la siguiente representación matemática:

$$u^p(x, y) = \frac{1}{\sqrt{|S|}} \iint u(x_o, y_o) \exp \left[ \frac{i\pi}{T} \left( (x^2 + y^2) + (x_o^2 + y_o^2) \right) \right] \bullet \exp \left[ -\frac{2\pi i}{S} (xx_o + yy_o) \right] dx_o dy_o \quad (1)$$

$$S = \lambda f_1 \sin \left( p \frac{\pi}{2} \right); \quad T = \lambda f_1 \tan \left( p \frac{\pi}{2} \right); \quad f_1 = f_o \sin \left( p \frac{\pi}{2} \right) \quad (2)$$

Donde  $f_o$  es la longitud focal de la lente que utiliza el procesador. El parámetro de escala  $\lambda f_1$  debe permanecer constante para todos los órdenes fraccionarios;  $u(x_o, y_o)$  representa el campo a transformar y  $u^p(x, y)$  es su respectiva transformada fraccionaria de Fourier (FRFT) de orden  $p$ .

En los arreglos ópticos tipo I y tipo II presentados por Lohmann<sup>7</sup> para obtener en forma óptica la FRFT, al variar el orden de la FRFT, cambian tanto las distancias focales de las lentes involucradas en el arreglo como

las distancias de las propagaciones. Lo anterior indica que para obtener una serie fraccionaria de la entrada con dichos arreglos se deben cambiar las lentes para cada orden fraccionario, de tal forma que el parámetro de escala  $\lambda f_1$  permanezca constante para cada orden fraccionario.

Experimentalmente variar las distancias entre los elementos de un sistema óptico no es tan difícil como modificar las distancias focales de las lentes utilizadas. El anterior inconveniente fue solucionado por Lohmann mediante una modificación en la disposición de las lentes del arreglo tipo II <sup>7</sup>. Lohmann denominó “fake zoom lens” a este nuevo arreglo, en el cual la focal efectiva cambia con el orden fraccionario, así con el arreglo se puede obtener la transformada fraccionaria de una transparencia, para órdenes fraccionarios entre -1 y 1, conservando la escala de la transformación  $\lambda f_1$  en todo el intervalo.

### Modelo teórico FRFT “fake zoom lens”

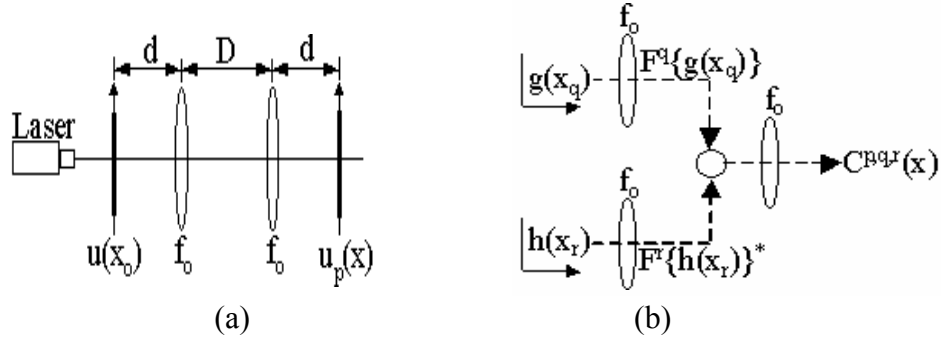


Figura 1. (a) Arreglo FRFT “fake zoom lens”. (b) Diagrama de flujo VLC fraccionario.

El esquema mostrado en la figura 1.(a), corresponde a un arreglo óptico FRFT “fake zoom lens”, las distancias de propagación  $d$  y  $D$  están relacionados con el orden fraccionario por las siguientes ecuaciones:

$$d = f_o \left\{ \tan \left( p \frac{\pi}{4} \right) + 1 \right\} \quad (3)$$

$$D = f_o \left\{ 2 + \sin \left( p \frac{\pi}{2} \right) \right\} \quad (4)$$

Donde  $f_o$  es la longitud focal de cada lente y  $p$  es el orden fraccionario de la transformación en la salida del arreglo. La focal efectiva  $f_e$  del dispositivo óptico está definida por la siguiente expresión:

$$f_e = \frac{f_o}{\sin(p \frac{\pi}{2})} \quad (5)$$

El parámetro de escala  $\lambda f_1$  está relacionado con la focal efectiva del arreglo de la siguiente forma:

$$\lambda f_1 = \lambda f_e \sin(p \frac{\pi}{2}) \quad (6)$$

La relación entre (5) y (6) muestra que el parámetro de escala  $\lambda f_1 = \lambda f_o$ , resultado que garantiza obtener una serie continua FRFT en el intervalo de órdenes fraccionarios  $[-1,1]$ . La FRFT de la entrada  $u(x_o, y_o)$ , realizada con el arreglo “fake zoom lens”, queda entonces definida de la siguiente forma:

$$u^p(x, y) = \frac{1}{\sqrt{|S_p|}} \iint u(x_o, y_o) \exp \left[ \frac{i\pi}{T_p} \left\{ (x^2 + y^2) + (x_o^2 + y_o^2) \right\} \right] \cdot \exp \left[ -\frac{2\pi i}{S_p} (xx_o + yy_o) \right] dx_o dy_o \quad (7)$$

$$S_p = \lambda f_o \sin \left( p \frac{\pi}{2} \right), \quad T_p = \lambda f_o \tan \left( p \frac{\pi}{2} \right) \quad (8)$$

En la figura 1.(b),  $g(x_q)$  representa el patrón a reconocer y  $h(x_r)$  el patrón de referencia, siendo  $F^q\{g(x_q)\}$  y  $F^r\{h(x_r)\}$  las transformadas fraccionarias de  $g(x_q)$  y  $h(x_r)$ , respectivamente, y donde  $H = F^r\{h(x_r)\}$  representa el filtro de correlación. Según la ecuación (7) la FRFT del objetivo a reconocer y la del patrón de referencia, obtenidas estas transformadas mediante el arreglo de la figura 1.(a), se pueden representar por las ecuaciones (9)-(10) y (11)-(12), respectivamente:

$$g^q(x_o) = \frac{1}{\sqrt{|S_q|}} \int_{-\infty}^{\infty} g(x_q) \exp \left[ \frac{i\pi}{T_q} (x_q^2 + x_o^2) \right] \exp \left[ -\frac{2\pi i}{S_q} (x_q x_o) \right] dx_q \quad (9)$$

$$S_q = \lambda f_o \sin \left( q \frac{\pi}{2} \right), \quad T_q = \lambda f_o \tan \left( q \frac{\pi}{2} \right) \quad (10)$$

$$h^r(x_o) = \frac{1}{\sqrt{|S_r|}} \int_{-\infty}^{\infty} h(x_r) \exp \left[ \frac{i\pi}{T_r} (x_r^2 + x_o^2) \right] \exp \left[ -\frac{2\pi i}{S_r} (x_r x_o) \right] dx_r \quad (11)$$

$$S_r = \lambda f_o \sin \left( r \frac{\pi}{2} \right), \quad T_r = \lambda f_o \tan \left( r \frac{\pi}{2} \right) \quad (12)$$

El siguiente paso es obtener la función de correlación  $C^{p,q,r}(x) = F^p \{ g^q(x_o) \bullet [h^r(x_o)]^* \}$ , siendo p el orden de la transformación del producto  $g^q(x_o) \bullet [h^r(x_o)]^*$ . Utilizando la expresión (1) la función de correlación toma la siguiente representación:

$$C^{p,q,r}(x) = \frac{1}{\sqrt{|S_p|}} \int_{-\infty}^{\infty} [g^q(x_o) \bullet h^r(x_o)^*] \exp \left[ \frac{i\pi}{T_p} (x^2 + x_o^2) \right] \exp \left[ -\frac{2\pi i}{S_p} (xx_o) \right] dx_o \quad (13)$$

$$S_p = \lambda f_1 \sin \left( p \frac{\pi}{2} \right), \quad T_p = \lambda f_1 \tan \left( p \frac{\pi}{2} \right) \quad (14)$$

reemplazando (9) y (11) en (13) entonces la función de correlación toma la siguiente forma:

$$C^{p,q,r}(x) = \frac{1}{\sqrt{|S_p S_q S_r|}} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} [g(x_q) \bullet h(x_r)^*] \exp [i\pi x_o^2 T] \exp [i\pi Q] \bullet \exp \left[ -i2\pi x_o \left( \frac{x}{S_p} + \frac{x_q}{S_q} - \frac{x_r}{S_r} \right) \right] dx_o dx_r dx_q \quad (15)$$

$$T = \frac{1}{T_p} + \frac{1}{T_q} - \frac{1}{T_r}; \quad Q = \frac{x^2}{T_p} + \frac{x_q^2}{T_q} - \frac{x_r^2}{T_r} \quad (16)$$

Para que la expresión (15) represente una función de correlación debe cumplir la condición de sharpness ( $T=0$ ); bajo esta condición la ec.(15) es una función de correlación, entonces,

$$C^{p,q,r}(x) = \frac{1}{\sqrt{|S_p S_q S_r|}} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} [g(x_q) \bullet h(x_r)^*] \exp \left[ i\pi \left( \frac{x^2}{T_p} + \frac{x_q^2}{T_q} - \frac{x_r^2}{T_r} \right) \right] \bullet \exp \left[ -i2\pi x_o \left( \frac{x}{S_p} + \frac{x_q}{S_q} - \frac{x_r}{S_r} \right) \right] dx_o dx_r dx_q \quad (17)$$

Las condiciones experimentales, establecidas en la implementación, propuesta en este trabajo son  $p=-1$  y  $q=r$ , entonces  $S_p = \lambda f_o$ ,  $S_q = S_r = S_o$  y  $T_q = T_r = T_o$ ; introduciendo estas condiciones en la ecuación (17) se obtiene lo siguiente,

$$C^{-1,q,q}(x) = \frac{1}{\sqrt{|\lambda f_o S_o^2|}} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} [g(x_q) \bullet h(x_r)^*] \exp \left[ i\pi \left( \frac{x_q^2 - x_r^2}{T_o} \right) \right] \bullet \quad (18)$$

$$\bullet \exp \left[ -i2\pi x_o \left( -\frac{x}{\lambda f_o} + \frac{x_q - x_r}{S_o} \right) \right] dx_o dx_r dx_q$$

si escribimos la expresión (18) de la siguiente forma,

$$C^{-1,q,q}(x) = \frac{1}{\sqrt{|\lambda f_o S_o^2|}} \int_{-\infty}^{\infty} g(x_q) \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} h(x_r)^* \exp \left[ i\pi \left( \frac{x_q^2 - x_r^2}{T_o} \right) \right] \bullet \quad (19)$$

$$\bullet \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} \exp \left[ -i2\pi x_o \left( -\frac{x}{\lambda f_o} + \frac{x_q - x_r}{S_o} \right) \right] dx_o \right\} dx_r \right\} dx_q$$

esta última ecuación también es igual a,

$$C^{-1,q,q}(x) = \frac{1}{\sqrt{|\lambda f_o S_o^2|}} \int_{-\infty}^{\infty} g(x_q) \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} h(x_r)^* \exp \left[ i\pi \left( \frac{x_q^2 - x_r^2}{T_o} \right) \right] \bullet \quad (20)$$

$$\bullet \left( 2\pi x_o \left( \frac{x}{\lambda f_o} - \frac{x_q - x_r}{S_o} \right) \right) dx_r \right\} dx_q$$

evaluando la ecuación (20) se obtiene,

$$C^{-1,q,q}(x) = \frac{1}{2\pi\sqrt{|\lambda f_o|}} \exp \left[ -i\pi \frac{x^2}{2\lambda f_o} \sin(q\pi) \right] \int_{-\infty}^{\infty} g(x_q) \bullet h \left( x_q - x \sin \left( q \frac{\pi}{2} \right) \right)^* \bullet \quad (21)$$

$$\bullet \exp \left[ i2\pi \frac{x_q x}{\lambda f_o} \cos \left( q \frac{\pi}{2} \right) \right] dx_q$$

La ecuación (21) es una función de correlación fraccionaria la cual satisface la condición de mantener constante el término de escala  $\lambda f_o$  para todos los órdenes q y r entre [-1,1].

## Resultados

Para esta implementación experimental se utilizó un cristal fotorrefractivo BTO como medio de soporte del filtro de correlación

$H(x_0)$ . El esquema de la figura 3 corresponde al arreglo experimental utilizado para realizar la operación de correlación fraccionaria.

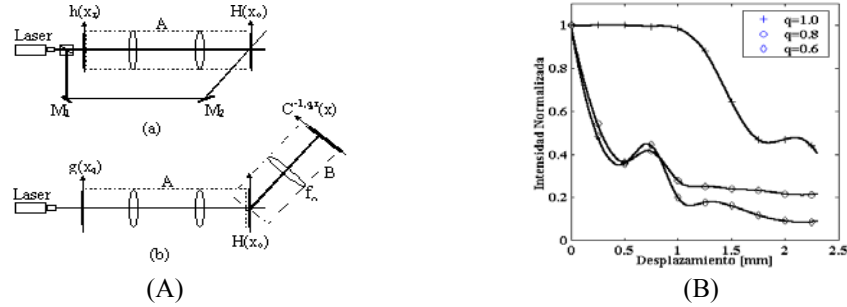


Figura2. (A) Arreglo experimental para obtener: (a) el registro holográfico del filtro y (b) la correlación fraccionaria  $C(x)$ . (B): Intensidad máxima de  $C(x)$  vs desplazamiento del objetivo.

El filtro holográfico  $H$  contiene el patrón de interferencia generado por el de haz de referencia y la FRFT de orden  $r$  de la transparencia  $h(x_r)$ , la transformada se genera sobre el plano del cristal fotorrefractivo a través del sistema óptico de la figura 2.(A): (a). Una vez concluida la etapa de registro del filtro, se ejecuta la operación de correlación mediante el arreglo de la figura 2(A): (b); el subsistema  $A$  permite obtener la FRFT de orden fraccionario  $q$  de la transparencia  $g(x_q)$  sobre el plano del filtro. A través del subsistema  $B$  se produce una FRFT de orden  $p=-1$  de la amplitud difractada del filtro  $H$ , sobre el plano de salida  $C(x,y)$ . De esta forma, mediante el arreglo experimental de la figura 2.(A) se puede obtener una correlación fraccionaria  $C^{-1,q,r}(x,y)$  para infinitos órdenes fraccionarios  $q$  y  $r$  entre  $-1$  y  $1$ , modificando solo las distancias  $d$  y  $D$ . En la figura 2.(B) se muestran los resultados obtenidos para las condiciones experimentales  $p=-1$ , y  $q=r=[1, 0.8, 0.6]$ .

Para el experimento se utilizó caracteres binarios como escenas de entrada, y una fuente óptica láser de He-Ne, de longitud de onda 632.8nm y 30mw de potencia. Las tres lentes utilizadas en el arreglo óptico tienen la misma distancia focal ( $f_0=26\text{cm}$ ).

## Conclusiones

Se implementó experimentalmente un correlador fraccionario fotorrefractivo basado en un arreglo “fake zoom lens”.

El resultado obtenido muestra que el correlador fotorrefractivo fraccionario tiene una alta sensibilidad a las traslaciones del objetivo, sensibilidad interpretada como el fuerte decaimiento energético del pico de correlación a pequeños cambios de posición espacial del objetivo. Comprendemos así, que un correlador con las características mostradas puede tener un uso muy importante en el posicionamiento, el reconocimiento y la localización de objetos dentro de una escena.

La sensibilidad del correlador aumenta con la disminución en el orden fraccionario  $q$  y  $r$ . Cabe anotar, que el cambio del subsistema B de la figura 2.(A) por un arreglo “fake zoom lens” permite ampliar el funcionamiento del correlador implementado de  $C^{-1,q,r}(x,y)$  a  $C^{-p,q,r}(x,y)$ .

**Agradecimientos:** Esta investigación se realizó bajo el auspicio del CONICET, Facultad de Ingeniería de la Universidad Nacional de La Plata (Argentina). J. Rueda agradece el apoyo financiero de COLCIENCIAS (Colombia).

## Referencias

1. Vander Lugt, “Signal detection by complex spatial filtering”, IEEE Trans. Inf. Theory IT-10, 139-146, (1964).
2. J. W. Goodman and C.S. Weaver, “A technique for optically convolving two functions”, Appl. Opt., Vol.5, 1248-1249, (1966).
3. P. Günter and J.P. Huignard, “Photorefractive materials and their applications II”, Springer-Verlag, Berlin, 205-271, (1989).
4. S. Granieri, M. C. Lasprilla, N. Bolognini and E. Sicre, “Space-variant optical correlator based on the fractional Fourier transform: Implementation by the use of a photorefractive  $\text{Bi}_{12}\text{GeO}_{20}$  (BGO) holographic filter”, Appl. Opt., Vol.35, No.35, 6951-6954, (1996).
5. A.W. Lohmann, Z. Zalevsky, and D. Mendlovic, “Synthesis of pattern recognition filters for fractional Fourier processing”, Opt. Comm., Vol.128, 199-204, (1996).
6. Adolf W. Lohmann, “Image rotation, Wigner rotation, and the fractional Fourier transform”, J. Opt. Soc. Am. A, Vol.10, No.10, 2181-2186, (1993).
7. Adolf W. Lohmann, “A fake zoom lens for fractional Fourier experiments”, Op. Comm., Vol.115, 437-443, (1995).