

Efecto de la Gravedad sobre la Propagación Coherente de Pulsos Atómicos a través de una Fibra Optica Hueca

A. Guzmán^{1,2}, C. Ramírez¹, A. Zapata^{1,3,4}

¹Depto. de Física, Universidad Nacional de Colombia, Bogotá

²Georgia Tech Lorraine, 57070 Metz, France

³Universidad del Atlántico, Barranquilla, Colombia

⁴Universidad del Norte, Barranquilla, Colombia

Se estudia el efecto de la gravedad en la propagación de pulsos atómicos en fibras ópticas huecas. Los átomos son guiados por una onda electromagnética evanescente hacia el interior hueco de la fibra. Mediante una aproximación adiabática se deriva el potencial óptico confinante para el movimiento del centro de masa de átomos en el estado base adiabático. Se derivan las ecuaciones modales y se demuestra que existe un mínimo valor del radio de la guía por debajo del cual no hay modos guiados. La acción de la gravedad aumenta o disminuye el número de modos, dependiendo de si es paralela o antiparalela a la dirección de propagación. Este efecto se ilustra claramente con resultados de la propagación numérica de un pulso atómico. Cuando la gravedad actúa en sentido opuesto a la dirección de propagación la densidad de probabilidad se focaliza en la región central de la fibra y se propaga en una estructura monomodal.

Abstract

We analyze the effect of gravity on atomic pulse propagation in hollow optical fibers. The atoms are guided by an evanescent electromagnetic wave in the hollow region. By means of an adiabatic approximation we derive the confining optical potential for the center of mass motion of atoms in the adiabatic ground state. We derive modal equations for the waveguide and demonstrate that there are no guided modes for guide-widths below a minimum value. Gravity increases or diminishes the number of propagation modes depending when acting parallel or anti-parallel to the direction of propagation. This effect is clearly seen from the results of numerical simulation of atomic pulse propagation. When gravity acts opposite to the direction of propagation, the probability density is focalized into the central region and shows monomodal structure

1. Introducción

El uso de fibras ópticas huecas como guías de onda atómicas fue propuesto en [1]. Una guía de onda hueca tiene la estructura cilíndrica de una fibra óptica con un núcleo tubular. La intensidad del campo modal del núcleo decae exponencialmente como onda evanescente en la región hueca de la fibra. Si el campo electromagnético está desintonizado hacia el azul de una transición atómica cuasi-resonante, debido al gradiente de intensidad, los átomos que se propagan en el interior hueco son reflejados en las paredes de la fibra. Existen cálculos teóricos perturbativos de constantes de propagación modal para guías atómicas cilíndricas [2], resultados numéricos de la estructura modal de guías planas [3] y resultados experimentales que demuestran tal efecto [4].

En este trabajo presentamos resultados para la propagación coherente de átomos en el interior de una fibra óptica hueca, teniendo en cuenta el efecto de la gravedad. En la sección 2 derivamos el potencial óptico efectivo para átomos en el estado base electrónico utilizando una aproximación adiabática. En la sección 3 derivamos las ecuaciones para la estructura modal de haces atómicos y analizamos sus características. En la sección 4 realizamos la simulación numérica de la propagación de un pulso atómico en la guía, y presentamos resultados que permiten comparar la propagación en ausencia de la gravedad y en presencia de ella en dirección co- o contra-propagante. La sección 5 contiene conclusiones y perspectivas.

2. Dinámica del sistema

Por simplicidad consideramos un campo electromagnético monomodal propagándose en el núcleo de una fibra hueca a lo largo del eje z , con frecuencia ω y constante de propagación β . El campo eléctrico de la onda evanescente en la región interior hueca de radio a , decae exponencialmente hacia el interior y en coordenadas cilíndricas (r, ϕ, z) puede aproximarse por [2]:

$$\mathbf{E}(r, \phi, z) = \hat{\epsilon}(\phi) E_0 \exp\left[\frac{U}{a}(r-a)\right] \exp(i\beta z - i\omega t) + c.c., \quad (1)$$

donde $\hat{\epsilon}(\phi)$ es un vector complejo de polarización y E_0 es la amplitud compleja del campo en $r=a$. $U = a\sqrt{\beta^2 - k_L^2}$, donde k_L es el vector de onda del campo láser en el vacío.

El campo es cuasi-resonante con una transición atómica $J=0 \rightarrow J=1$, entre estados propios del hamiltoniano H_{at} del átomo en el sistema del centro de masa, a saber, el estado base $|g\rangle$ y un estado excitado degenerado compuesto por tres subniveles magnéticos $\{|j\rangle, j=0, \pm 1\}$. El hamiltoniano atómico total

incluye el movimiento del centro de masa y la interacción dipolar eléctrica con el campo $\mathbf{E}$:

$$H = -\frac{\hbar^2 \nabla_{\perp}^2}{2M} + \frac{p_z^2}{2M} \mp Mgz + H_{at} - \mathbf{d} \cdot \mathbf{E} \quad (2)$$

Los tres primeros términos en la ecuación (2) corresponden a la energía cinética del movimiento traslacional y a la energía potencial gravitacional; $\nabla_{\perp}^2$ es el operador laplaciano transversal, M la masa atómica, p_z el operador momentum longitudinal y g la aceleración de la gravedad. El último término representa la interacción dipolar eléctrica. En ausencia de procesos disipativos, la dinámica del sistema está gobernada por una ecuación de Schrödinger dependiente del tiempo. El estado $|\Psi(t)\rangle$ del sistema puede expresarse como producto directo de estados propios de H_{at} y de funciones $\Psi_{g,j}(r, \phi, p_z, t)$ en la representación de coordenadas (r, ϕ) , y momentum p_z . Estas funciones representan el estado traslacional cuántico del átomo en los estados $|g\rangle$ y $|j\rangle$ [2]:

$$|\Psi(t)\rangle = \Psi_g(r, \phi, p_z, t) |g\rangle \exp(-i\omega_g t) + \sum_j \Psi_j(r, \phi, p_z, t) |j\rangle \exp(-i\omega_j t). \quad (3)$$

El término de interacción dipolar eléctrica en la aproximación de onda rotante puede expresarse como

$$\mathbf{d} \cdot \mathbf{E} = \sum_j \Omega_j(r, \phi) |j\rangle \langle g| \exp(i\beta z - i\omega t) + \Omega_j^*(r, \phi) |g\rangle \langle j| \exp(-i\beta z + i\omega t), \quad (4)$$

donde $\Omega_j(r, \phi)$ representa la magnitud de la interacción con cada uno de los subniveles, e incluye coeficientes de Clebsch-Gordon y efectos de la polarización de la luz. Remplazando (2) a (4) en la ecuación de Schrödinger y realizando la transformación

$$\bar{\Psi}_j(r, \phi, p_z, t) = \exp(i\Delta t) \Psi_j(r, \phi, p_z + \hbar\beta, t), \quad (5)$$

donde $\Delta = \omega - (\omega_j - \omega_g)$ es la desintonización, se obtiene un sistema de ecuaciones para las funciones que describen el movimiento traslacional del centro de masa atómico:

$$\begin{aligned} i\hbar \frac{\partial \Psi_g}{\partial t} &= (H_{eff} + \hbar\Delta_{eff}) \Psi_g - \sum_j \Omega_j^* \bar{\Psi}_j \\ i\hbar \frac{\partial \bar{\Psi}_j}{\partial t} &= H_{eff} \bar{\Psi}_j - \Omega_j \Psi_g, \end{aligned} \quad (6)$$

donde

$$H_{eff} = -\frac{\hbar^2 \nabla_{\perp}^2}{2M} + \frac{(p_z + \hbar\beta)^2}{2M} - \hbar\Delta \mp Mgz. \quad (7)$$

La desintonización efectiva ,

$$\Delta_{eff} = \Delta - \frac{p_z \beta}{M} - \frac{\hbar\beta^2}{2M}, \quad (8)$$

incluye el corrimiento Doppler y la energía de retroceso.

El sistema de ecuaciones acopla el estado base con momentum p_z a estados excitados con momentum $p_z + \hbar\beta$. El término de energía potencial $\mp Mgz$ puede ser eliminado de H_{eff} en (7) mediante la transformación unitaria:

$$\begin{aligned} \Psi_g(r, \phi, p_z, t) &= \exp(\pm iMgz t / \hbar) \hat{\Psi}_g(r, \phi, p_z, t) \\ \bar{\Psi}_j(r, \phi, p_z, t) &= \exp(\pm iMgz t / \hbar) \hat{\Psi}_j(r, \phi, p_z, t), \end{aligned} \quad (9)$$

que transforma H_{eff} y Δ_{eff} en operadores dependientes del tiempo,

$$\begin{aligned} \hat{H}_{eff}(r, \phi, p_z, t) &= -\frac{\hbar^2 \nabla_{\perp}^2}{2M} + \frac{(p_z \pm Mgt + \hbar\beta)^2}{2M} - \hbar\Delta \\ \hat{\Delta}_{eff}(p_z, t) &= \Delta - \frac{(p_z \pm Mgt)\beta}{M} - \frac{\hbar\beta^2}{2M}, \end{aligned} \quad (10)$$

que describen las variaciones del momentum causadas por la gravedad.

La evolución dinámica del sistema ocurre en dos escalas de tiempo distintas: la interacción con el campo electromagnético causa transiciones entre estados electrónicos internos del átomo en la escala de tiempo del inverso de la frecuencia de Rabi, $T = (\Omega_j / 2\hbar)^{-1} \approx 10^{-10}$ a 10^{-9} s, mientras el campo gravitacional produce variaciones apreciables del momentum del centro de masa en tiempos mucho mayores. Explícitamente, si el cambio de momentum causado por la acción de la gravedad durante el tiempo característico de interacción con la radiación satisface $\Delta p_z(T) / p_z \ll 1$, la interacción con la radiación electromagnética puede describirse a través de estados atómicos que dependen paramétricamente de $p_z(t) = p_z \pm Mgt$, y que evolucionan adiabáticamente a medida que cambia el momentum del centro de masa. Esta condición es satisfecha incluso para átomos en un condensado de Bose-Einstein a temperaturas de nanokelvins donde $\Delta p_z(T) / p_z \approx 10^{-3}$.

La ecuación de Schrödinger puede ser escrita en forma matricial introduciendo el vector $\Phi(r, \phi, p_z, t)$ con componentes $\hat{\Psi}_{g,j}$:

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Phi(r, \phi, p_z, t) = \hat{H}_{eff}(r, \phi, p_z, t) \Phi(r, \phi, p_z, t) + \hat{V}(r, \phi; p_z(t)) \Phi(r, \phi, p_z, t). \quad (11)$$

El operador $\hat{V}(r, \phi; p_z(t))$, que depende de $\hat{\Delta}_{eff}(p_z(t))$, puede ser diagonalizado para cada $(r, \phi, p_z(t))$. Del conjunto de sus vectores propios $\chi(r, \phi; p_z(t))$, dos corresponden al estado base atómico con valores propios

$$\hat{V}_{1,2}(r, \phi; p_z(t)) = \hbar \hat{\Delta}_{eff}(p_z(t)) / 2 \pm \sqrt{\Omega(r)^2 + [\hbar \hat{\Delta}_{eff}(p_z(t)) / 2]^2}, \quad (12)$$

donde

$$\Omega(r) = \sqrt{\sum_j |\Omega_j(r, \phi)|^2} \approx dE_0 \exp\left[\frac{U}{a}(r-a)\right]. \quad (13)$$

Los otros dos vectores propios involucran los subniveles magnéticos del estado excitado [2] y no serán transcritos aquí. Los estados $\chi(r, \phi; p_z(t))$ pueden ser usados como una nueva base,

$$\Phi(r, \phi, p_z, t) = \sum_n \Phi_n(r, \phi, p_z, t) \chi_n(r, \phi; p_z(t)), \quad (14)$$

donde los coeficientes $\Phi_n(r, \phi, p_z, t)$ son funciones de onda del movimiento traslacional del centro de masa de un átomo en el estado adiabático $\chi_n(r, \phi; p_z(t))$ que satisfacen:

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Phi_n = [\hat{H}_{eff} + \hat{V}_n] \Phi_n + \sum_m \hat{V}_{nm}^{(na)} \Phi_m. \quad (15)$$

En el primer término de (15) el sumando $\hat{V}_n$ corresponde al valor propio del operador $\hat{V}(r, \phi; p_z(t))$ asociado con el estado adiabático, que constituye un potencial óptico efectivo para el movimiento traslacional del átomo. De los potenciales ópticos dados en (12) para dos estados adiabáticos correspondientes al estado base electrónico, solamente $\hat{V}_1$ es confinante. El último término en (15) introduce un acoplamiento no adiabático entre los estados adiabáticos del

sistema y será despreciado. A continuación realizamos la transformación unitaria inversa de (9) para el estado confinado $\Phi_1(r, \phi, p_z, t)$, a saber:

$$\Phi_1(r, \phi, p_z, t) = \exp(\mp i M g z t / \hbar) \Psi(r, \phi, p_z, t). \quad (16)$$

La ecuación (15) se transforma en:

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Psi = [H_{eff} + V] \Psi, \quad (17)$$

donde

$$V(r; p_z) = \hbar \Delta_{eff} / 2 + \sqrt{\Omega(r)^2 + (\hbar \Delta_{eff} / 2)^2} \approx \hbar \Delta_{eff} \left[1 + \eta^2 \exp(2U(r-a)/a) \right], \quad (18)$$

con $\eta = dE_0 / \hbar \Delta_{eff}$.

3. Propagación de haces atómicos de energía definida en presencia de la gravedad

En la representación de coordenadas la ecuación (17) tiene soluciones estacionarias de la forma $\xi(r, \phi, z) \exp(-iEt / \hbar)$ donde la energía del sistema atómico está determinada por el valor inicial de la energía cinética $E = \hbar^2 k_{DB}^2 / 2M$, expresada en terminos del número de onda de DeBroglie k_{DB} . Las funciones $\xi(r, \phi, z)$ que satisfacen la ecuación de valores propios

$$[H_{eff} + V] \xi(r, \phi, z) = \left[-\frac{\hbar^2 \nabla^2}{2M} + \hbar \Delta_{eff} \eta^2 \exp\left(\frac{2U}{a}(r-a)\right) \mp M g z \right] E \xi(r, \phi, z), \quad (19)$$

son separables:

$$\xi(r, \phi, z) = A(r) Z(z) \exp(i l \phi). \quad (20)$$

Introduciendo las variables adimensionales $\rho = r k_{DB}$ y $\zeta = z k_{DB}$ y las longitudes $L_g = (\hbar / M)^{2/3} (2g)^{-1/3} = 0.59 \mu$ y $L_{opt} = (1 / \eta) \sqrt{\hbar / 2M \Delta} \approx 1.69 \times 10^{-2} \mu$, características de la interacción gravitacional y del potencial óptico respectivamente, obtenemos

$$\begin{aligned} \frac{d^2 A}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{dA}{d\rho} - \frac{l^2 A}{\rho^2} - V_{opt}(\rho) A + \frac{\beta_l^2 A}{k_{DB}^2} &= 0 \\ \frac{d^2 Z}{d\zeta^2} + \left[1 \pm \left[\frac{1}{L_g k_{DB}} \right]^3 \zeta - \frac{\beta_l^2}{k_{DB}^2} \right] Z &= 0, \end{aligned} \quad (21)$$

donde

$$V_{opt}(\rho) = \left[\frac{1}{L_{opt} k_{DB}} \right]^2 \exp \left[\frac{2U}{a k_{DB}} (\rho - a k_{DB}) \right]. \quad (22)$$

Para $U \ll 1$, podemos hacer una aproximación analítica a la solución de la ecuación radial en (21) aproximando el potencial óptico por un pozo cuadrado con altura igual al valor del potencial en $r=a$. La ecuación para la parte radial de la función modal resulta entonces análoga a la de modos TE en una fibra óptica con perfil de índice de refracción de paso y parámetro

$$V_{guia} = \frac{a}{L_{opt}} \sqrt{1 - \exp(-2U)} \approx \frac{a}{L_{opt}}. \quad (23)$$

Dado que la amplitud de probabilidad es escalar, no existe un modo fundamental análogo al modo HE de la fibra, y solo existen modos guiados si el parámetro de la guía es mayor que el primer cero de la función de Bessel de orden cero, a saber

$$V_{guia} \approx \frac{a}{L_{opt}} \geq 2.405 \quad (24)$$

La ecuación para los modos longitudinales en (21) semeja a la de una guía plana con índice de refracción creciente o decreciente con ζ .

$$n^2(\zeta) = 1 \pm \left[\frac{1}{L_g k_{DB}} \right]^3 \zeta. \quad (25)$$

De la ecuación (21) puede verse que la “constante efectiva” de propagación modal a lo largo del eje z varía a medida que la gravedad acelera el centro de masa, excepto en ausencia de ella cuando $Z \propto \exp \left(i \sqrt{k_{DB}^2 - \beta_l^2} \right) z$. Cuando la gravedad acelera los átomos (signo + en la ecuación), el parámetro de la guía, que es proporcional a la raíz cuadrada de la diferencia de los cuadrados de los índices de refracción y al ancho de la guía, resulta proporcional a $\sqrt{\zeta}$. Por tanto el efecto de la gravedad puede considerarse como un aumento del índice de refracción del núcleo de la guía plana, o alternatively como un aumento del ancho de la guía. El número de modos β_l se incrementa. Si la gravedad actúa en dirección opuesta a la gravedad el número de modos disminuye y la guía se angosta concentrando la densidad de probabilidad hasta un punto de retorno en que la dirección de propagación se invierte.

4. Propagación de pulsos atómicos.

En la sección precedente se estudió el caso de propagación de haces atómicos con una energía E definida. La dinámica de pulsos finitos temporalmente está descrita por la ecuación (17)

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Psi = \left[-\frac{\hbar^2 \nabla^2}{2M} + \hbar \Delta_{eff} \eta^2 \exp\left(\frac{2U}{a}(r-a)\right) \mp Mgz \right] \Psi. \quad (26)$$

Suponemos a continuación que

$$\Psi(r, \phi, z, t) = F(r, z, t) \exp(i l \phi) \exp(-iEt / \hbar), \quad (27)$$

donde $F(r, z, t)$ es una amplitud de probabilidad compleja, de un paquete de ondas con energía cinética media E . Llevando (26) A (27) obtenemos

$$\frac{-i\hbar}{E} \frac{\partial F}{\partial t} = \left[\frac{\partial^2}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} - \frac{l^2}{\rho^2} + \frac{\partial^2}{\partial \zeta^2} + 1 \pm \left[\frac{1}{L_g k_{DB}} \right]^3 \zeta - V_{opt}(\rho) \right] F \quad (28)$$

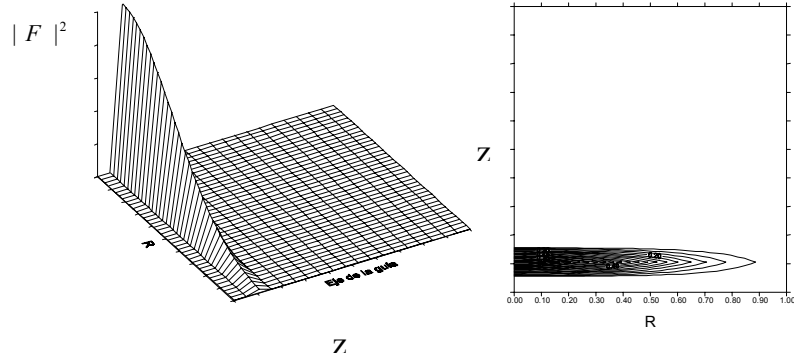


Figura 1. Diagrama tridimensional de la densidad de probabilidad del pulso y su diagrama de contorno correspondiente para $T=0$.

La simulación se efectuó utilizando el método descrito en [8] y [9]. La Figura 1 muestra la densidad de probabilidad del pulso atómico inicial en tres dimensiones y su diagrama de contorno. En la gráfica $R=r/a$.

En las Figuras 2 y 3 se muestran los diagramas de contorno para los tiempos de propagación indicados en la figuras. Los diagramas inferiores muestran en

ambos figuras la propagación en ausencia de la gravedad. El pulso inicial se descompone en varios modos de propagación, correspondientes a diferentes β_l .

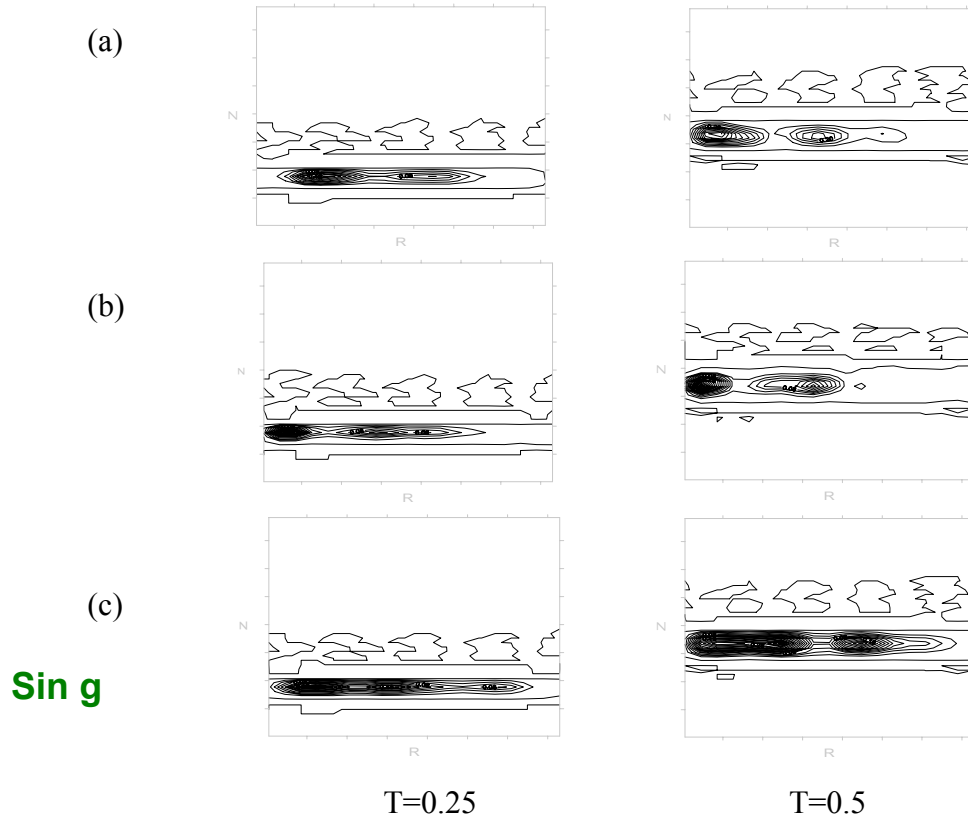


Figura 2. Curvas de contorno de la densidad de probabilidad para diferentes tiempos de propagación de un pulso atómico, (a) con la gravedad en la dirección de propagación, (b) con la gravedad en dirección opuesta a la de propagación y (c) sin gravedad.

En las Figuras 2(a) y 3(a) se observa la propagación del pulso en la misma dirección que la gravedad. No se diferencian claramente los máximos correspondientes a la estructura modal inicial, lo que evidencia un incremento en el número de modos. En el caso contrario, cuando la gravedad es opuesta al movimiento se evidencia una concentración de la densidad de probabilidad alrededor del eje de la guía, y la supresión de modos superiores.

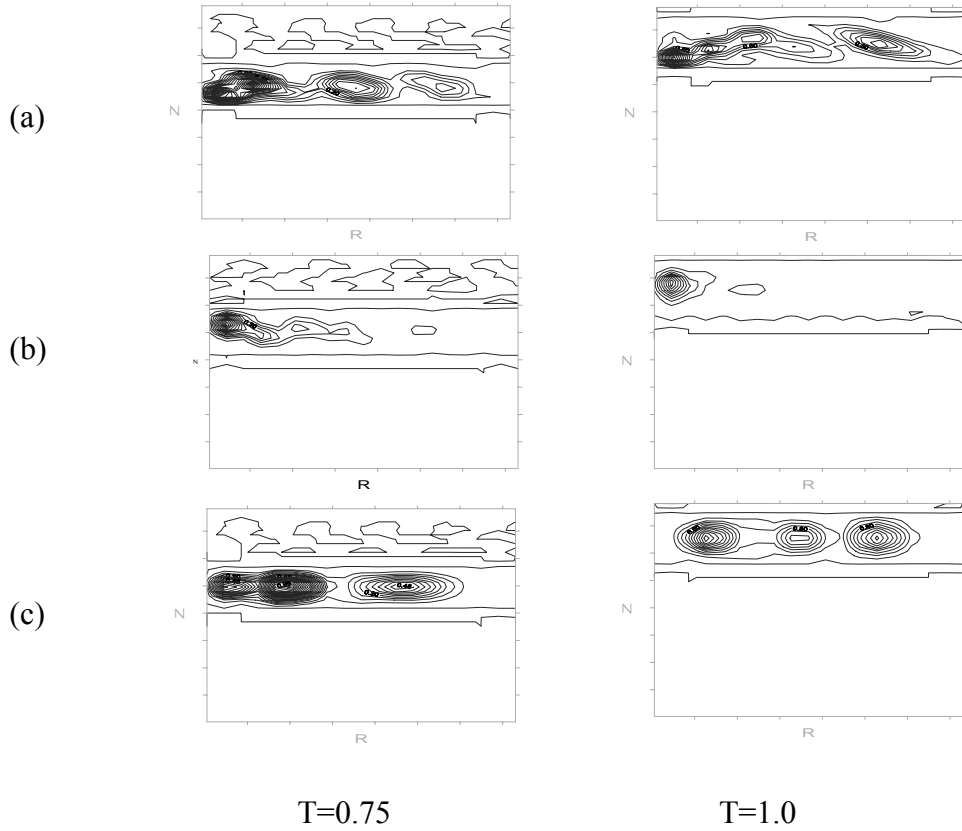


Figura 3. Curvas de contorno de la densidad de probabilidad atómica para $T=0.75, 1.0$: (a) con la gravedad en la dirección de propagación, (b) con la gravedad en dirección opuesta a la de propagación y (c) sin gravedad.

5. Conclusiones y perspectivas

El efecto acelerador o decelerador de la gravedad cuando actúa paralelamente al eje de la guía, puede interpretarse como una variación del perfil del potencial óptico confinante, análogo al caso de guías de onda ahusadas. Cuando los átomos se aceleran, se incrementa notablemente el número de modos y se empieza a evidenciar la dispersión del pulso. Pero también es posible filtrar un haz multimodal mediante propagación en dirección contraria a la aceleración de la gravedad, de modo que la densidad de probabilidad se confina en la región central y se propaga con estructura monomodal. Este último fenómeno semeja la acción de un lente gravitacional. No se han tenido en cuenta aquí las pérdidas de densidad de probabilidad que puede causar la vecindad de un dieléctrico sobre partículas confinadas [5], sin embargo es de esperar que las pérdidas sean

grandes cuando el haz se desenfoca, y prácticamente despreciables cuando el haz es enfocado.

Más recientemente se ha demostrado la posibilidad de utilizar guías atómicas basadas en potenciales magnéticos confinantes creados por un alambre delgado por el que circula una corriente eléctrica [6]. De esta forma se pretende evitar pérdidas de coherencia debidas a la interacción de los átomos con las paredes de la fibra. El análisis de su estructura modal es actualmente objeto de investigación. Su simpleza ha abierto una nueva área de estudio en la propagación de haces atómicos y en el diseño de chips para los mismos [7].

Bibliografía

1. M.A. Ol'Shanii, Yu B. Ovchinnikov, V. S. Letokhov, Opt. Comm. **98**, 77 (1993).
2. S. Marksteiner, C. M. Savage, P. Zoller, S.L. Roston, Phys. Rev. A **50**, 2680 (1994).
3. E. Arévalo, A. Guzmán, Rev. Col. Fis. **29**,324, (1998)
4. M. J. Renn et al., Phys. Rev. Lett. **75**, 3253 (1995).
5. C. Henkel, S. Pötting, M. Wilkens, Appl. Phys. B **69**, 379 (1999)
6. J. Denschlag, D. Cassettari, J. Schmiedmayer, Phys. Rev. Lett. **82**, 2014 (1999).
7. R. Folman, P. Krüger, D. Cassettari, B. Hessmo, T. Maier, J. Schmiedmayer, Preprint **arXiv:quant-ph/9912106**.
8. J. Shibayama, et al., J. Lightwave Technol. **18**, 437 (2000).
9. J. Yamauchi, et al., J. Lightwave Technol. **14**, 2401 (1996).