Revista de la Academia Colombiana de Ciencias Exactas,
Físicas y Naturales, 1970, Vol. 13, No. 52

ALGUNOS INTEGRALES DEFINIDOS Y LAS ECUACIONES EN DIFERENCIAS FINITAS QUE SATISFACEN

Por GABRIEL POVEDA RAMOS

1. Cuando se trata de aplicar el método llamado "de cuadratura de Gauss", en Análisis Numérico para construír fórmulas para el cálculo aproximado de integrales de la forma

$$\int_{-1}^{+1} f(x).\ \text{sen}\ x.\ dx$$

siendo f (x) una función definida en todo el intervalo cerrado $[-1, +1]$, el problema se enfoca presuponiendo que la fórmula es una combinación lineal de valores de la función f (x) en ciertos puntos del intervalo $[-1, +1]$ (que se trata luego de identificar), y que dicha fórmula es rigurosamente correcta para los primeros miembros de la familia de funciones

$$x^0,\ x,\ x^2,\ x^3,\ \ldots,\ x^n,\ x^{n+1},\ \ldots$$

hasta un grado tal que permita localizar los puntos aludidos.

2. Al desarrollar ese algoritmo, el calculista se ve llevado a la necesidad de obtener los valores numéricos de la familia de integrales

$$(01)\quad I_n = \int_{-1}^{+1} x^n.\ \text{sen}\ x.\ dx \quad \text{siendo}\ n = 0,1,2,3,\ldots$$

que forma una sucesión de números reales, y de la cual trata esta nota.

3. Es claro que si se conociera una relación general de recurrencia entre dos o más miembros consecutivos de esta familia, y si se conocieran los valores numéricos de un número adecuado de miembros iniciales podrían obtenerse luego, por recurrencia, los valores de los restantes hasta el valor de n que fuera necesario. Esta observación no es otra cosa que una manera de expresar el teorema de existencia y unicidad de soluciones para ecuaciones en diferencias finitas, puesto que toda relación general de recurrencia para términos consecutivos de una sucesión, equivale a una ecuación en diferencias finitas.

4. En primer lugar es fácil advertir que si n es par los valores I_n son nulos. En efecto, poniendo $n = 2r$, con $r \in N$, se tiene

$$I_{2r} = \int_{-1}^{+1} x^{2r}.\ \text{sen}\ x.\ dx =$$

$$\int_{-1}^{0} x^{2r}.\ \text{sen}\ x.\ dx + \int_{0}^{+1} x^{2r}.\ \text{sen}\ x.\ dx =$$

$$-\int_{0}^{+1} (-x)^{2r}.\ \text{sen}\ (-x), d(-x) + \int_{0}^{+1} x^{2r}.\ \text{sen}\ x.\ dx = 0$$

Gráficamente es fácil ver de inmediato que tal integral es nula, porque representa el área comprendida entre el eje 0x y una curva cuyas ordenadas están dadas por la función impar $y = x^{2r}.\ \text{sen}\ x$, entre los dos puntos simétricos -1 y $+1$.

5. Por lo tanto, en lo que sigue nos ocuparemos solo de los miembros de la familia (0.1) de orden impar, o sea los de la forma

$$(02)\quad I_{2r+1} = \int_{-1}^{+1} x^{2r+1}.\ \text{sen}\ x.\ dx = 2\int_{0}^{+1} x^{2r+1}.\ \text{sen}\ x.\ dx$$

siendo $r = 0,1,2,\ldots$

6. El primero de los términos de esta sucesión es

$$I_1 = \int_{-1}^{+1} x.\ \text{sen}\ x.\ dx$$

que usando el recurso llamado de integración por partes, resulta ser

$I_1 = 2 .\ \text{sen}\ 1 - 2\cos 1$
o bien

(03) $I_1 = s - c$,
siendo $s = 2 .\ \text{sen}\ 1$, $c = 2 .\ \cos 1$.

7. Los valores de estos números pueden calcularse usando las series de MacLaurin de $\text{sen}\, x$ y $\cos x$;

$$\text{sen}\ 1 = 1 - 1/3! + 1/5! - 1/7! + \ldots$$
$$\cos\ 1 = 1 - 1/2! + 1/4! - 1/6! + \ldots$$

Calculando hasta 15 dígitos exactos, esos valores resultan ser:

Sen $1 = 0.841470984807902$
Cos $1 = 0.540302305868139$
$s = 2 .\ \text{sen}\ 1 = 1.682941969615804$
$c = 2 .\ \cos\ 1 = 1.080604611736278$
$s - c = 0.60233735787953$ (con 14 decimales exactos).

8. La ley de recurrencia entre los términos de la sucesión (02) es muy sencilla y fácil de establecer. Efectivamente, siendo k cualquier número natural mayor que cero (es decir $k \in N_+$), e integrando por partes dos veces se tiene:

$$\int_{-1}^{+1} x^{2k+1} .\ \text{sen}\, x .\ dx = -2\cos 1 + (2k+1) \int_{-1}^{+1} x^{2k} \cos x .\ dx$$

$$= -2\cos 1 + (2k+1) \left[2\ \text{sen}\ 1 - 2k \int_{-1}^{+1} x^{2k-1} .\ \text{sen}\, x .\ dx. \right]$$

Es decir

(04) $I_{2k+1} = -2\cos 1 + 2\ (2k+1)\ \text{sen}\ 1 - (2k+1)\ 2k .\ I_{2k-1}$

y esta ecuación de recurrencia que permitiría calcular numéricamente, en forma consecutiva, todos los términos de la sucesión de integrales (02) hasta el orden que se desee.

9. Es bien sabido que las potencias enteras crecientes de cada número real en el intervalo (0.1) forman una sucesión decreciente. Es decir, que para cada k natural y cada $x \in (0,1)$, se tiene

$$x^{2k+1} < x^{2k-1}$$

En consecuencia

$$I_{2k+1} = 2 \int_0^1 x^{2k+1} .\ \text{sen}\, x .\ dx < 2 \int_0^1 x^{2k-1} .\ \text{sen}\, x .\ dx = I_{2k-1}$$

y la sucesión (02), cuyos términos son todos positivos resulta ser monotónica y estrictamente decreciente. En otros términos

(04-A) $\Delta\ I_{2k+1} = I_{2k+3} - I_{2k+1} < 0$ para todo $k \in N$.

Además se advierte fácilmente que la sucesión converge a cero.

10. La ecuación de recurrencia (04) puede escribirse en la forma prototipo para una ecuación en diferencias finitas, ordinaria, lineral, no-homogénea:

(05) $I_{2k+1} + (2k+1)\ 2k\ I_{2k-1} = (2k+1)\ s - c$

La ecuación homogénea asociada es

(06) $I_{2k+1} + (2k+1)\ 2k .\ I_{2k-1} = 0$

y, como se sabe bien, su solución es la parte complementaria de la solución general de (05). La forma de la ecuación (06), que tiene coeficientes variables, permite catalogarla bajo el tipo que se llama "de Euler-Cauchy", ya que puede escribirse también

(06-A) $I_{2k+1} + (2k+1)^{(2)}\ I_{2k-1} = 0$

en donde el exponente entre paréntesis indica "potencia factorial descendente".

11. Dentro de la teoría general de ecuaciones en diferencias finitas, es sabido que tales ecuaciones de Euler-Cauchy, admiten soluciones de la forma

(07) $Y_{2k+1} = (2k+1)^{(m_{2k+1})}\ (-1)^k\ A$

en donde A es un factor arbitrario constante o periódico en k, de período 2; y m_{2k+1} es una potencia factorial descendente que debe satisfacer idénticamente la condición establecida por (06-A). Esta condición se obtiene sustituyendo la solución (07) en la ecuación (06-A), para obtener

$$(2k+1)^{(m_{2k+1})} - (2k+1)\ 2k\ (2k-1)^{(m_{2k-1})} = 0$$

$$(2k+1)^{(m_{2k+1})} = (2k+1)^{(2+m_{2k-1})}$$

Esta condición queda satisfecha con $m_{2k+1} = 2k+1$. Por lo tanto, la parte complementaria de la solución general de (05) es

$$(08)\quad Y_{2k+1} = (-1)^k\ A\ (2k+1)^{(2k+1)} = (-1)^k\ A\ (2k+1)!$$

12. La solución general de (05) puede hallarse recurriendo al método de variación de parámetros en la parte complementaria. Pongamos, pues,

$$(09)\quad I_{2k+1} = (-1)^k\ A_k\ (2k+1)!$$

y sustituyamos en (05):

$$(-1)^k\ A_k\ (2k+1)! + (2k+1)^{(2)}\ (-1)^{k-1}\ A_{k-1}\ (2k-1)! = (2k+1)\ s - c$$

$$A_k - A_{k-1} = (-1)^k \left[\frac{s}{(2k)!} - \frac{c}{(2k+1)!} \right]$$

Esta ecuación es de primer orden, y su solución general es

$$A_k = s \sum_{r=1}^{r=k} (-1)^r/(2r)! - c \sum_{r=1}^{r=k} (-1)^r/(2r+1)! + A.$$

siendo A_o una constante aditiva arbitraria o periódica de período 2. Excluyendo esta constante se obtiene una solución particular (es decir, poniendo $A_o = o$) en la expresión (09):

$$(10)\quad s\,(2k+1)! \sum_{r=1}^{r=k} (-1)^{k+r}/(2r)! - c\,(2k+1)! \sum_{r=1}^{r=k} (-1)^{k+r}/(2r+1)!$$

Introduzcamos el factor $(2k+1)!$ dentro de las sumaciones, y recordemos que $r < k$, en cuyo caso

$$(2k+1)!/(2r)! = (2k+1)^{(2k+1)}/(2r)^{(2r)} = (2k+1)^{(2k+1-2r)};$$

$$(2k+1)!/(2r+1)! = (2k+1)^{(2k-2r)}$$

Además, hagamos en las sumatorias de (10) el cambio de índice $k - r = m$. En esta forma la solución particular (09) queda

$$s \sum_{m=k-1}^{m=o} (-1)^{2k-m}\ (2k+1)^{(2m+1)} - c \sum_{m=k-1}^{m=o} (-1)^{2k-m}\ (2k+1)^{(2m)}$$

Sumando la parte complementaria se obtiene la solución general:

$$(11)\quad I_{2k+1} = (-1)^k\ A_o\ (2k+1)! + s \sum_{m=o}^{m=k-1} (-1)^{2k-1}\ (2k+1)^{(2m+1)}$$

$$- c \sum_{m=o}^{m=k-1} (-1)^{2k-m}\ (2k+1)^{(2m)}$$

para $k = 1,2,3,4,\ldots$, el cual satisface la ecuación de recurrencia (05) como se puede comprobar sin dificultad.

13. Aplicando la solución (11) al caso $k = 1$, se obtiene:

$$I_3 = -3!\ A_0 + 3\,s - c$$

y usando directamente la fórmula (05) se tiene

$$I_3 + 3 \times 2\ I_1 = 3\,s - c$$

de donde el valor de la constante aditiva es

$$A_0 = L_1 = s - c$$

en nuestro caso.

14. Sustituyendo A_0 en la solución general hallamos finalmente la forma de la sucesión de integrales que estudiamos

$$I_{2k+1} = (-1)^k I_1 (2k+1)! + s\left[(2k+1) - (2k+1)^{(3)} + \ldots + (-1)^{k-1} (2k+1)^{(2k-1)}\right]$$

$$-c\left[1 - (2k+1)^{(2)} + \ldots + (-1)^{k-1} (2k+1)^{(2k-2)}\right] \quad (k = 1,2,3,\ldots)$$

$$I_{2k+1} = s\left[(2k+1) - (2k+1)^{(3)} + \ldots + (-1)^{k-1} (2k+1)^{(2k-1)} + (-1)^k (2k+1)!\right]$$

$$-c\left[1 - (2k+1)^{(2)} + \ldots + (-1)^{k-1} (2k+1)^{(2k-2)} + (-1)^k (2k+1)^{(2k)}\right], \text{ siendo}$$

$k = 1,2,3,\ldots$

Esta expresión puede escribirse en la forma resumida

$$(12) \quad I_{2k+1} = s \sum_{r=0}^{r=k} (-1)^r (2k+1)^{(2r+1)} - c \sum_{r=0}^{r=k} (-1)^r (2k+1)^{(2r)}, \text{ con } k = 1, 2, 3, \ldots$$

de la cual se obtiene la forma explícita de cualquiera de los integrales en la sucesión (02) de que nos ocupamos. Fácilmente puede comprobarse que esta solución es correcta, sustituyéndola en la ecuación (05).

15. Usando la fórmula de recurrencia (05) y partiendo del valor ya conocido de I_1, se pueden obtener los primeros de la sucesión por cómputo numérico directo. Este cómputo lo ha hecho el autor en una calculadora electrónica de mesa, marca Sharp, con 16 dígitos de registro y aproximación al 14° decimal. Los siete primeros resultados que da la máquina, son:

$I_1 = 0.60233735787953$

$I_3 = 0.35419714983395$

$I_5 = 0.25016223966373$

$I_7 = 0.19317510969766$

$I_9 = 0.15726521657369$

$I_{11} = 0.1325832309317$

$I_{13} = 0.1146569679240$

Al tratar de calcular I_{15} e I_{17} se encuentran los resultados evidentemente erróneos de

$I_{15} = 0.855616684608$ (!)

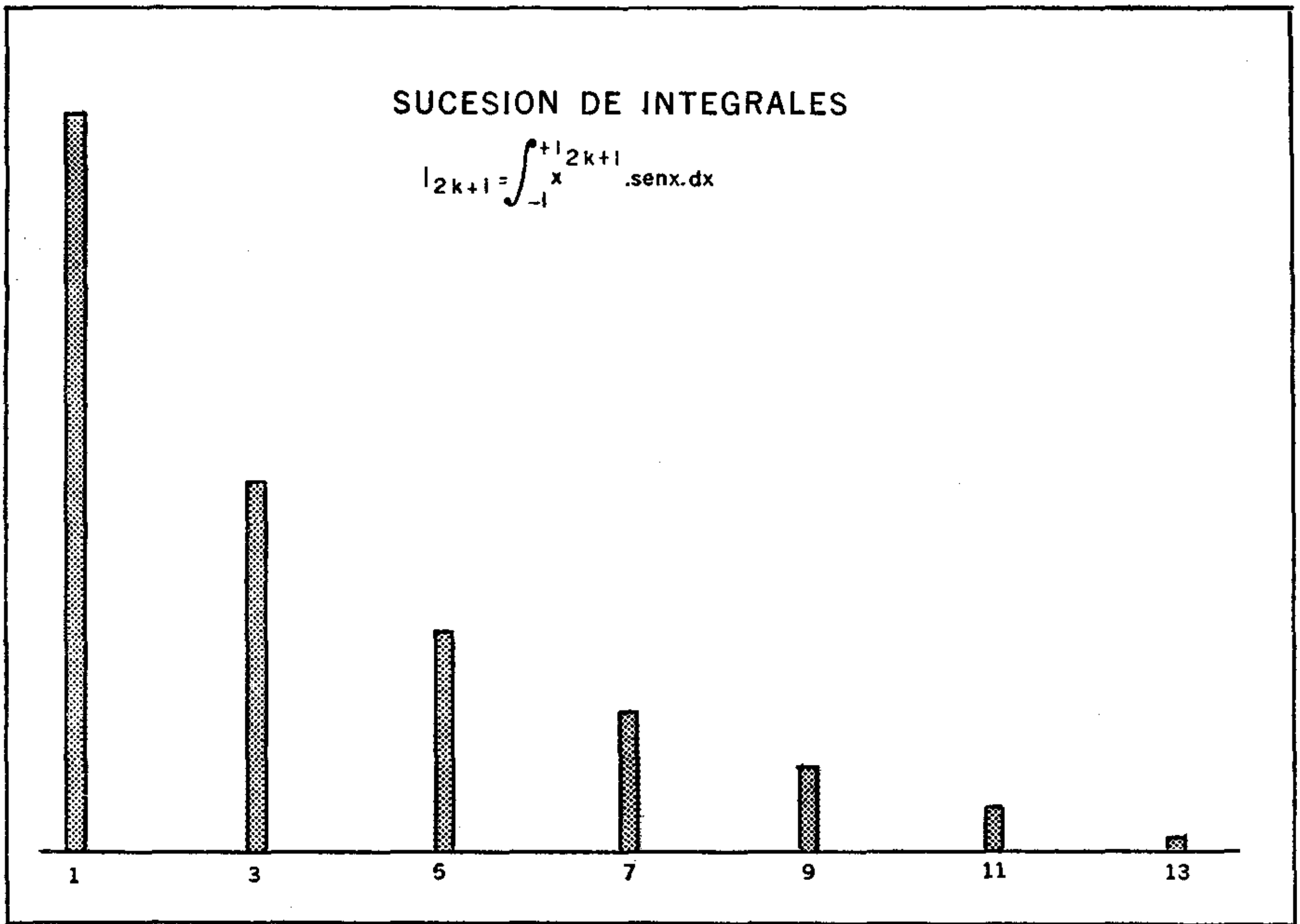
$I_{17} = 4.2566350503948$ (!)

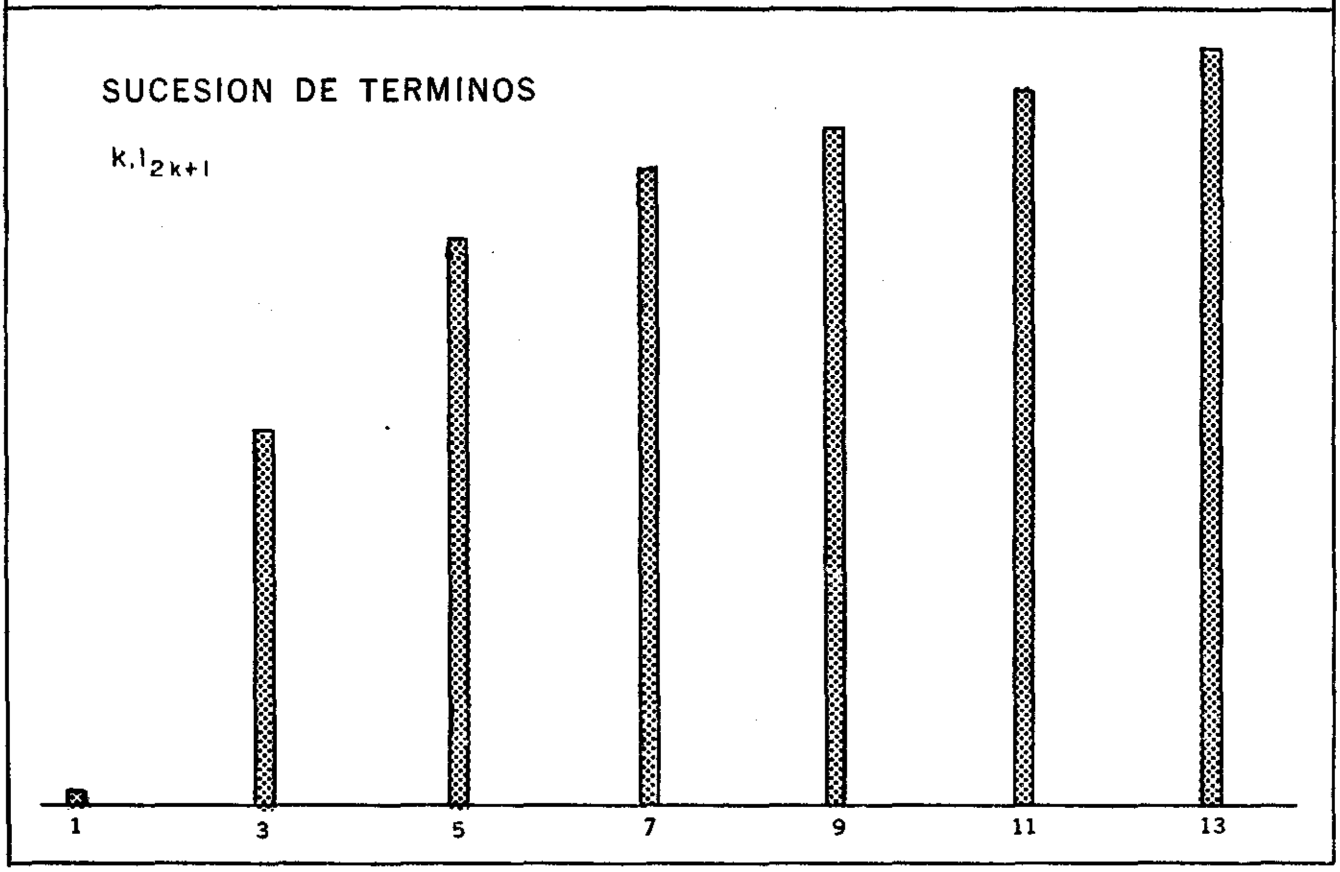
que son mayores (!!) que I_{13}, y a partir de los cuales la sucesión numérica comienza a aumentar (!!) y a oscilar en signo (!!). Más adelante se explica este fenómeno.

16. Dividiendo ambos miembros de la ecuación de recurrencia (05) por $(2k+1)$ se obtiene

$$\frac{I_{2k+1}}{2k+1} = -2k\, I_{2k-1} + s - \frac{c}{2k+1}$$

Tomando límites cuando k aumenta indefinidamente, y notando que


SUCESION DE INTEGRALES
$I_{2k+1} = \int_{-1}^{+1} x^{2k+1}.\mathrm{senx}.dx$
1
3
5
7
9
11
13


SUCESION DE TERMINOS
$k.I_{2k+1}$
1
3
5
7
9
11
13

$$(13)\quad \lim_{k \to \infty} \frac{I_{2k+1}}{2k+1} = 0$$

se deduce que

$$\lim_{k \to \infty} (k.\ I_{2k-1}) = s/2 = \text{sen } 1 = 0.841470984807902.$$

17. A partir de los valores numéricos de los primeros términos de las sucesión de los I_{2k+1}, presentados atrás, calculamos directamente los primeros siete términos $k\ I_{2k-1}$, que resultan ser, hasta el 14° decimal:

1. $I_1 = 0.60233735787953$
2. $I_3 = 0.70839429966790$
3. $I_5 = 0.75048671899119$
4. $I_7 = 0.77270043879068$
5. $I_9 = 0.78632608286845$
6. $I_{11} = 0.7954993855836$
7. $I_{13} = 0.8025988607532$

En el gráfico anexo se muestran los primeros términos de I_{2k+1} y de $k.\ I_{2k-1}$.

18. Si en el cómputo numérico del valor de s se introduce un error no nulo ϵ, y en el cómputo de c se introduce otro error no nulo δ, estos errores se propagan hasta I_{2k+1} introduciendo en éste un error ϵ_{2k+1}, que, comparado con el del término anterior, se puede deducir de la misma ecuación de recurrencia (05):

$$(14)\quad \epsilon_{2k+1} = -(2k+1)\ 2k.\ \epsilon_{2k-1} + (2k+1)\ \epsilon - \delta$$

La presencia de δ en el último término y no en otro muestra que desde que ϵ y δ no sean ambos cero, la sucesión de errores no puede tener cero como límite (si es que tiene límite). Esto significa que el error propagado no es disipativo. Entonces admitamos que ϵ_{2k+1} tiene límite finito (no nulo) y escribamos la ecuación (14) en la forma

$$\frac{\epsilon_{2k+1}}{(2k+1)\ .\ \epsilon_{2k-1}} = -2k + \frac{\epsilon}{\epsilon_{2k-1}} - \frac{\delta}{(2k+1)\ .\ \epsilon_{2k-1}}$$

Tomando límites (con $k \to \infty$) se obtiene el resultado absurdo $0 = -\infty$
luego el error propagado no tiene límite finito, es decir, no es estacionario.

19. Lo que es más importante, es que el error no solamente no es estacionario sino que es no-acotado o divergente. Porque si existiera una cota superior B para el módulo del error, se tendría que con todo valor de k:

$$-B < \epsilon_{2k+1} < B$$

y observando que

$$-(2k+1) < -(2k+1)\ \epsilon < (2k+1)$$

$$-1 < \delta < 1$$

al sumar las tres últimas desigualdades se tendría

$$-\frac{B+2k+2}{2k(2k+1)} < \epsilon_{2k-1} < \frac{B+2k+2}{2k(2k+1)}$$

para todo valor de k, y de ello se seguiría que $\lim_{k \to \infty} \epsilon_{2k-1} = 0$, lo cual ya se demostró que no es posible.

Además, la forma de la ecuación (14) muestra que a partir de cierto valor de k el signo del error es oscilante, como ya se advirtió, a menos que ϵ y δ sean ambos ceros, lo cual no es posible en el cómputo numérico.

20. Resumiendo lo anterior, se concluye que si y solo si, sen 1 y cos 1 pueden computarse con absoluta exactitud, el error propagado es cero. En realidad, y ya que sen 1 y cos 1 no son racionales,

tienen una expansión decimal infinita y para realizar cómputos numéricos con ellos la expansión de ambos debe suspenderse en algún punto, redondeando por exceso o por defecto pero, en todo caso, haciendo $\epsilon \neq 0$ y $\delta \neq 0$.

21. La fórmula del error se deduce de (12) y resulta, evidentemente:

$$(15) \quad \epsilon_{2k+1} = \epsilon \sum_{r=0}^{k} (-1)^r \; (2k+1)^{(2r+1)} + \delta \sum_{r=0}^{k} (-1)^{r-1} \; (2k+1)^{(2r)}$$

Si la expansión se suspende en el N° decimal, redondeando el que siga, es

$10^{-n} < |\epsilon| \leqslant 5 \times 10^{-n-1}$ y $10^{-n} < |\delta| \leqslant 5 \times 10^{-n-1}$, de donde resulta una cota superior para el módulo del error cometido en cada término I_{2k+1}:

$$|\epsilon_{2k+1}| \leqslant 10^{-n} \text{ x} \left| \sum_{r=0}^{2k+1} (2k+1)^{(r)} \right|$$

Como se vé, para garantizar que el módulo del error sea pequeño para un valor dado de k, es necesario tomar n muy grande, es decir, determinar sen 1 y cos 1 con un número muy grande de decimales exactos.

21. Volviendo al estudio de nuestras integrales, escribamos explícitamente su ley de formación:

$$(16) \quad I_{2k+1} = s \left[(2k+1) - (2k+1)^{(3)} + \ldots \pm (2k+1)^{(2k+1)} \right]$$

$$- c \left[1 - (2k+1)^{(2)} + \ldots \pm (2k+1)^{(2k)} \right]$$

Usando el operador derivante D, tal que Df (t) = df/dt, la anterior expresión puede escribirse

$$I_{2k+1} = \left(1 - D^2 + D^4 - D^6 + \ldots \right) \left((2k+1) \; s\,t^{2k} - c\,t^{2k+1} \right) \Big|_{t=1}$$

en donde la barra vertical a la derecha con t en la parte inferior, significa el valor que resulta de hacer t = 1 en la expresión que resulta al aplicar el operador en D. Formalmente (y también analíticamente) podemos escribir

$$(17) \quad I_{2k+1} = \frac{1}{1+D^2} \left((2k+1) \; s\,t^{2k} - c\,t^{2k+1} \right) \Big|_{t=1}$$

Este resultado significa que para la ecuación diferencial

$$(18) \quad y'' + y = (2k+1) \; s\,t^{2k} - c\,t^{2k+1}$$

existe una solución particular F (.t; k), tal que

$$(19) \quad I_{2k+1} = F \; (1; k)$$

22. Como es bien sabido, toda solución particular de la ecuación diferencial (18) es de la forma

$$(20) \quad F(t) = 2A.\text{sen}\,t + 2\,B.\cos t + e^{-it} \int_0^t e^{2iu} \int_0^u {}^{-iv} \phi\,(v)\,.dv.du$$

en donde u,v son variables libres, A y B son constantes indeterminadas, y ϕ v) es

$$\phi\,(v) = (2k+1) \; s\,v^{2k} - c\,v^{2k+1}$$

De tal manera que el resultado que acabamos de establecer significa que existe un par de valores para los coeficientes A, B tales que

$$I_{2k+1} = As + Bc + (2k+1)\, s\, e^{-i} \int_0^1 e^{2iu} \int_0^u e^{-iv} .v^{2k}.dv.du$$

$$- c\,e^{-i} \int_0^1 e^{2iu} \int_0^u e^{-iv} \; v^{2k+1}\,.dv.du$$

Comparando esta expresión con la forma general de I_{2k+1}' dada por la fórmula (12), igualando los coeficientes de s y de c, pueda escribirse

$$A = \sum_{r=0}^{r=k} (-1)^r \, (2k+1)^{(2r+1)} - (2k+)\, e^{-i} \int_0^1 e^{2iu} \int_0^u e^{-iv} .v^{2k} \; .dv.du$$

$$B = \sum_{r=o}^{r=k} (-1)^{r} (2k+1)^{(2r)} + e^{-1} \int_{0}^{1} e^{21u} \int_{0}^{u} e^{-1v} . v^{2k+1} . dv.du$$

y con estos dos valores en (20) obtenemos explícitamente la forma de la función F (t, k) tal que F (1, k) $= I_{2k+1}$

23. Finalmente, interesa tomar nota de una desigualdad que puede establecerse respecto a los valores de la sucesión I_{2k+1}. De la ecuación (04) de recurrencia, se deduce

$$I_{2k+2} - I_{2k+1} = c + (2k+3)\ s - \left[(2k+3)\ (2k+1) + 1 \right] I_{2k+1}$$

y de la inecuación (04 A) se deduce

$$I_{2k+3} - I_{2k+1} < 0$$

Por lo tanto, de estas dos últimas expresiones se obtiene

$$I_{2k+1} > \frac{(2k+3)\ s - c}{(2k+3)\ (2k+1) + 1}$$

24. Otros aspectos interesantes de esta cuestión podrían discutirse, a no ser por la necesidad de limitar la extensión de esta breve nota.