MEDIAS CUASI-ARITMETICAS HOMOGENEAS

Por **GABRIEL POVEDA RAMOS**
I. Q. & E.

1. Se denomina media cuasi-aritmética de dos variables reales x, y, a toda función de ambas que tenga la forma

$$(0) \qquad M(x, y) = f^{-1}\left(\frac{f(x) + f(y)}{2}\right)$$

en donde f (u) es una función real continua, que admite una inversa f^{-1}. Esto significa que f debe ser estrictamente monotónica (bien creciente, o bien decreciente) en todo su dominio.

Ejemplos de medias cuasi-aritméticas hay muchos. Mencionamos ocho:

a) La media aritmética, en la cual $f(u) = au + b = z$, $f^{-1}(z) = (z - b)/a$:

$$M_1(x, y) = f^{-1}\left(\frac{ax + b + ay + b}{2}\right) = f^{-1}\left(a\frac{x + y}{2} + b\right) = \frac{x + y}{2}$$

para todo x, y que sean números reales.

b) La media armónica, en la cual $f(u) = a/u + b = z$, es decir $f^{-1}(z) = u$, o sea $f^{-1}(z) = a/(z - b)$:

$$M_{-1}(x, y) = f^{-1}\left(\frac{a/x + b + a/y + b}{2}\right) = f^{-1}\left(a\frac{1/x + 1/y}{2} + b\right) = \frac{2}{1/x - 1/y}$$

o bien

$$1/M - 1\ (x, y) = (1/x + 1/y)/2$$

como es tal vez más conocida. Esta media está definida para toda pareja de números reales, ninguno de ellos nulo.

c) La media geométrica, para la cual $f(u) = \log u + b = z$, o sea $u = \log^{-1}(z - b) = f^{-1}(z)$:

$$M_0(x, y) = f^{-1}\left(\frac{\log x + \log y}{2} + b\right) = f^{-1}(\log xy + b) = \log^{-1}\log\sqrt{xy} = \sqrt{xy}$$

que está definida para todo x y todo y estrictamente positivos.

d) La media cuadrática, aquella cuyo cuadrado es igual al promedio aritmético de los cuadrados de las variables. En este caso,

$f(u) = au^2 + b = z$, es decir $u = \sqrt{(z - b)/a}$:

$$M_2(x, y) = f^{-1}\left(\frac{ax^2 + b + ay^2 + b}{2}\right) = f^{-1}\left(a\frac{x^2 + y^2}{2} + b\right) = \sqrt{\frac{x^2 + y^2}{2}}$$

Para que esta media quede definida unívocamente y obedezca a la propiedad

$$\min(x, y) \leq M(x, y) \leq \max(x, y)$$

que todas deben satisfacer, su dominio está restringido a los valores no negativos de ambas variables.

e) La media potencial de grado k, siendo k un número entero. En este caso, $f(u) = au^k + b = z$, o sea $u = \sqrt[k]{(z - b)/a}$:

$$M_k(x, y) = f^{-1}\left(\frac{ax^k + b + ay^k + b}{2}\right) = f^{-1}\left(a\,\frac{x^k + y^k}{2} + b\right) = \sqrt[k]{\frac{x^k + y^k}{2}}$$

definido unívocamente para todos los valores no-negativos de x, y. Es obvio, por su construcción, que esta media potencial tiene como casos especiales a la media aritmética ($k = 1$), a la cuadrática ($k = 2$) y a la armónica ($k = -1$). No es tan obvio, pero es fácil demostrarlo, que $\lim_{k \to 0} M_k(v, y) = \sqrt{xy}$, es decir, que también incluye la geométrica como caso límite, para $k \to 0$

f) La media logarítmica, en la cual $f(u) = a\,e^u + b = z$, o bien, $u = \log(z - b)/a = f^{-1}(z)$:

$$L(x, y) = f^{-1}\left(\frac{a\,e^x + b + a\,e^y + b}{2}\right) = f^{-1}\left(a\,\frac{e^x + e^y}{2} + b\right) = \log\frac{e^x + e^y}{2}$$

o también $e^{L(x, y)} = (e^x + e^y)/2$.

g) La media coseno-hiperbólica, en la cual $f(u) = a.\cosh bu + c = z$.

Por métodos muy elementales que no repetimos aquí, se puede despejar u:

$$u = \frac{1}{b}\log_e\left(\frac{z - c}{a} + \sqrt{\left(\frac{z - c}{a}\right)^2 - 1}\right) = f^{-1}(z)$$

$$C(x, y) = f^{-1}\left(a\,\frac{\cosh bx + \cosh by}{2} + c\right)$$

$$C(x, y) = \log_e\left[\frac{\cosh bx + \cosh by}{2} + \left(\sqrt{\left(\frac{\cosh bx + \cosh by}{2}\right)^2 - 1}\right)\right]^{1/b}$$

Para que sea unívoca esta media, se define para variables x, y no-negativas (nulas o mayores que cero).

h) La media seno-hiperbólica, $S(x, y)$, en la cual $f(u) = a.\operatorname{senh} bu + c$, y cuya expresión puede el lector encontrar por sí solo.

Ya se puede observar que estos últimos tres ejemplos no pueden formularse como caso especial de la media potencial de grado k.

2. El problema de calcular y analizar medias se presenta con mucha frecuencia en Física, en Meteorología, en Economía, en Demografía, en Hidrología y, en general, en donde son frecuentes las aplicaciones de la estadística. Por lo común, se trata de calcularlas para medidas de valores (físicos, económicos, financieros, etc.) que se expresan por un número real y una unidad de medida. La media en cuestión puede ser de naturaleza tal que, al cambiar la unidad de medida de las variables, viéndose así multiplicado el número que las mide por un cierto factor, la media se vea multiplicada o no por dicho factor. Por ejemplo, si x, y son dos longitudes medidas en pulgadas (1 pulgada = 2.54 cm.), cuando se las exprese en centímetros *ellas y su media aritmética* se ven multiplicadas por 2.54; y lo mismo ocurre con la media geométrica, con la cuadrática y con otras; pero esto *no* ocurre con la media logarítmica, ni con otras.

Surge pues la pregunta de saber cuáles son las medias cuasi-aritméticas que cumplen, en general, la propiedad

$$\forall (x, y), \quad M(tx, ty) = t.\,M(x, y)$$

que se llama *propiedad homogénea.*

3. El objeto de esta nota es resolver el anterior problema. Es muy elemental, pero sucede que, después de buscar en mucha literatura de la Estadística y del Análisis, el autor no lo ha visto resuelto explícitamente. Por esta razón el autor hubo de hacerlo como se mostrará en seguida. Además, este método contiene algunas aplicaciones interesantes de ciertos resultados de la teoría de las Ecuaciones Funcionales, que se justifica divulgar algo más.

4. *Problema.* Identificar la clase de funciones reales f (u) que atribuyen a la media cuasi-aritmética

(0) $$M\ (x,y) = f^{-1}\left(\frac{f\ (x) + f\ (y)}{2}\right)$$

la propiedad homogénea, es decir, de que para todo número real positivo t, sean

$$M\ (tx, ty) = t.\ M\ (x, y)$$

4. La condición homogénea es, según las definiciones dadas:

(1) $$f^{-1}\left(\frac{f\ (tx) + f\ (ty)}{2}\right) = t.\ f^{-1}\left(\frac{f\ (x) + f\ (y)}{2}\right)$$

Escribamos $f\ (tx) = g_t\ (x) = u$, por lo cual $f^{-1}\ (u) = tx$, $g_t^{-1}\ (u) = x$, de donde

(2) $g_t^{-1}\ (u) = (1/t)\ f\ (u)$

Sustituyendo en (1):

$$f^{-1}\left(\frac{g_t\ (x) + g_t\ (y)}{2}\right) = t\,f^{-1}\left(\frac{f\ (x) + f\ (y)}{2}\right)$$

y dividiendo por t

$$(1/t)\ f^{-1}\left(\frac{g_t\ (x) + g_t\ (y)}{2}\right) = f^{-1}\left(\frac{f\ (x) + f\ (y)}{2}\right)$$

que, según (2), puede ponerse

$$g_t^{-1}\left(\frac{g_t\ (x) + g_t\ (y)}{2}\right) = f^{-1}\left(\frac{f\ (x) + f\ (y)}{2}\right)$$

Tomando antifunción de g_t^{-1} (o sea g_t):

(3) $$\left(\frac{g_t\ (x) + g_t\ (y)}{2}\right) = g_t\,f^{-1}\left(\frac{f\ (x) + f\ (y)}{2}\right)$$

en donde $g_t\ f$ es el "producto funcional" o composición funcional de g_t con f:

$$g_t\ f\ (u) = g_t \{f\ (u)\} = h\ (u)$$

Si escribimos $f\ (x) = u$, $f\ (y) = v$, es decir $x = f^{-1}\ (u), y = f^{-1}\ (v)$, la ecuación (3) nos da:

$$\frac{g_t\,f^{-1}\ (u) + g_t\,f^{-1}\ (v)}{2} = g_t\,f^{-1}\left(\frac{u+v}{2}\right)$$

o bien

(4) $$\frac{h\ (u) + h\ (v)}{2} = h\left(\frac{u+v}{2}\right)$$

La anterior es una ecuación funcional muy conocida que lleva el nombre de Ecn. Fcional. de Jensen. Se ha demostrado[1] que la única solución continua de esta ecuación es la expresión general

$h\ (u) = au + b$, siendo a, b constantes arbitrarias.

Esto es,

$$g_t\,f^{-1}\ (u) = au + b$$

y, puesto que $x = f^{-1}\ (u)$:

$$g_t\ (x) = a\ (t)\ .\ f\ (x) + b\ (t)$$

en donde a (t) y b (t) se han hecho depender de t, ya que así ocurre con g_t.

Recordando la definición adoptada para g_t:

[1] Ver por ejemplo, J. Aczel, Theory and Applications of Functional Equations.

(5) $f(tx) = a(t) \cdot f(x) + b(t)$

La ecuación (5) es equivalente a la (1) que da la condición de homogeneidad pedida.

5. La ecuación (5) así como su solución, son muy familiares para los que se ocupan de la teoría de ecuaciones funcionales. Pero como esta disciplina parece no estar muy divulgada en nuestro medio, daremos aquí el procedimiento para resolverla.

Sea la ecuación funcional

(6) $F(xy) = G(y)\ F(x) + H(y)$

en donde F, G, H son indeterminadas. En $x = 1$, tendremos

(7) $F(y) = G(y)\ F(1) + H(y)$

y restando (7) de (6):

$$F(xy) - F(y) = G(y)\ [F(x) - F(1)],$$

y sumando y restando F (1) a la izquierda obtenemos

$$F(xy) - F(1) - F(y) + F(1) = G(y)\ [F(x) - F(1)]$$

Indiquemos con $J(x) = F(x) - F(1)$ y podremos poner

$$J(xy) - J(y) = G(y)\ J(x)$$

o sea

(8) $J(xy) = G(y)\ J(x) + J(y).$

Ahora bien, evidentemente $J(xy) = J(yx)$, lo cual, por la ecuación (8) conduce a

$$G(y)\ J(x) + J(y) = G(x)\ J(y) + J(x)$$

en donde

(9) $[G(y) - 1]\ J(x) = [G(x) - 1]\ J(y)$

En este punto debemos hacer una distinción:

a) Si G (y) es idénticamente igual a 1 $[G(y) \equiv 1]$, la ecuación (8) toma la forma

(10) $J(xy) = J(x) + J(y),$

que es una ecuación funcional llamada ecuación logarítmica de Cauchy, y porque éste demostró que la única solución continua de (10) es $J(x) = \log_a x$, siendo a real positivo arbitrario.

Recordando la definición de J (x), esto es

$$F(x) = \log_a x + F(1)$$

y como F (1) puede fijarse arbitrariamente

$$F(x) = \log_a x + c$$

Sustituyendo en la ecuación original

$$F(xy) = G(y)\ F(x) + H(y)$$
$$\log_a (xy) + c = 1\ (\log_a X + c) + H(y)$$
$$\log_a x + \log_a y = \log_a x + H(y)$$
$$H(y) = \log_a y$$

Resumiendo: Si en la ecuación (6) se tiene $G(y) \equiv 1$, la única solución continua es

$$F(x) = \log_a X + c;\quad H(y) = \log_a y$$

siendo a una constante real positiva, c una constante real, y ambas arbitrarias (independientemente).

Por otra parte:

b) Si G (y) no es idénticamente igual a 1, esto significa que hay algún punto y_o donde $G(y_o) \neq 1$, y en el cual la ecuación (9) se expresa

$$[G(y_o) - 1]\ J(x) = [G(x) - 1]\ J(y_o)$$

$$J(x) = \frac{J(y_o)}{G(y_o) - 1}\ [G(x) - 1]$$

y siendo $J(y_o) / [G(y_o) - 1]$ una constante arbitraria A, la ecuación anterior resulta

$$J(x) = A\ G(y) - A$$

y sustituyendo en (8), se obtiene

$$G(xy) = G(x)\ G(y)$$

La solución de esta ecuación es debida a Vincze y su única forma continua es $G(x) = X^k$, siendo k un número real arbitrario.

Esto nos da para J (x):

$$F(x) - F(1) = J(x) = A x^k$$

$$F(x) = A x^k + F(1)$$

y siendo $F(1) = c$ arbitrario,

$$F(x) = A x^k + c$$

Sustituyendo F (x), G (x) como han sido halladas, en la ecuación propuesta (6), se encuentra en seguida

$$H(x) = C(1 - x^k)$$

Resumiendo: la única solución continua de la ecuación

$$F(xy) = G(y)\ F(x) + H(y), \text{ con } G(y) \not\equiv 1,$$

es el sistema de funciones

$$F(x) = Ax^k,\ G(x) = x^k,\ H(x) = c(1 - x^k)$$

En donde A, c, k son constantes reales arbitrarias, mutuamente independientes.

6. Volvamos ahora a la ecuación (5). Según acabamos de ver, si $a(t) = 1$, entonces su única solución continua es el sistema de funciones.

$$f(x) = \log_a x + c,\ b(t) = \log_a t,\ a(t) = 1$$

Muy fácilmente, el lector puede comprobar por sí mismo que estas funciones satisfacen la ecuación (5). Entonces la media que buscamos será

$$M(x, y) = f^{-1}\left(\frac{f(x) + f(y)}{2}\right) = f^{-1}\left(\frac{\log_a x + \log_a y}{2} + c\right) = f^{-1}(\log_a \sqrt{xy} + c) = \sqrt{xy}$$

es decir, la media geométrica.

7. Si en la ecuación (5), $a(t) \not\equiv 1$, la única solución continua de (5), como hemos visto, es el sistema

$$f(x) = Ax^k + c,\ a(t) = t^k,\ b(t) = c(1 - t^k)$$

Siendo A, k, c constantes reales arbitrarias. También es fácil verificar que, efectivamente, estas funciones satisfacen idénticamente la ecuación (5). Aquí no hemos demostrado que lo hagan ellas exclusivamente, pero esto último también es cierto, si es que necesitamos que f (x) sea continua en x y monotónica en todos los reales positivos.

En estas condiciones, tenemos

$$M(x, y) = f^{-1}\left(\frac{f(x) + f(y)}{2}\right) = f^{-1}\left(A\frac{x^k + y^k}{2} + c\right) = \sqrt[k]{\frac{x^k + y^k}{2}}$$

como se vio en el ejemplo e) del # 1 de esta misma nota.

Estos resultados pueden resumirse en el siguiente teorema:

8. *Teorema.* De todas las medias cuasi-aritméticas de la forma (0), solo la media potencial de grado k ($k \in R^*$)

$$M_k(x, y) = \sqrt[k]{\frac{x^k + y^k}{2}}$$

y la media geométrica

$$M_0(x, y) = \lim_{k \to 0} M_k(x, y) = \sqrt{xy}$$

son homogéneas. Esto incluye las medias aritmética, cuadrática y armónica, como casos especiales de $M_k(x, y)$.

9. Este es un resultado importante en la física, la biología, la economía y demás ciencias en donde valga el principio de homogeneidad dimensional y, por lo tanto, el Teorema "Pi" de Buckingham-Vaschy referente a las leyes naturales entre magnitudes sujetas al principio de invariancia ante cambios de unidades. Pero este es otro tema que esperamos tratar después.